Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências

# Sistemas locais rígidos

Adelino Mendes da Silva Paiva

Dissertação para a obtenção do grau de mestre
em Matemática

Setembro de 2000

Orientador: Prof. Orlando Neto

Trabalho realizado no âmbito do programa PRAXIS XXI

# Sumário

# Introdução

Riemann, no século XIX, classificou a equação hipergeométrica de Riemann utilizando apenas informações do tipo topológico e algébrico. A equação hipergeométrica de Riemann é uma equação diferencial de segunda ordem sobre $\mathbb{P}^1$ com três singularidades regulares, as quais podemos considerar que são $0, 1$ e $\infty$.

Os trabalhos de Riemann serviram de inspiração ao moderno conceito de correspondência de Riemann-Hilbert. A correspondência de Riemann-Hilbert estabelece uma equivalência de categorias entre as conexões meromorfas em $\mathbb{P}^1$ com singularidades regulares em $\{x_0, \cdots, x_n\}$ e a categoria dos sistemas locais sobre $\mathbb{P}^1 \setminus \{x_0, \cdots, x_n\}$. Por sua vez classificar estes sistemas locais não é mais do que classificar as sequências de $n+1$ matrizes invertíveis a menos de conjugação simultânea. As classes de conjugação dessas matrizes são as monodromias locais.

Tendo em vista o estudo da equação hipergeométrica de Riemann de um ponto de vista moderno é feita a classificação das representações $2 \times 2$ do grupo livre com dois geradores. O propósito do estudo destas representações centra-se nos factos de que à equação hipergeométrica de Riemann corresponde um sistema local de rank 2 sobre $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ e de que o grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}, *)$ é um grupo livre com dois geradores. A classificação das representações $2 \times 2$ do grupo livre com dois geradores é feita em duas etapas:

- a primeira consiste no estudo das representações irredutíveis,
- a segunda consiste no estudo das que não são irredutíveis.

Uma representação diz-se irredutível se as $n+1$ matrizes de rank $k$ são tais que $< 0 >$ e $\mathbb{C}^k$ são os únicos subespaços invariantes pela a acção de todas as matrizes. Como corolário desta classificação obtemos a classificação dos sistemas locais associados à equação hipergeométrica de Riemann, com a vantagem de que esta foi feita recorrendo apenas a métodos algébricos.

Riemann reconstruiu a equação hipergeométrica conhecendo os expoentes, os quais permitem-nos calcular as monodromias locais. A questão interessante que se coloca no seguimento das ideias de Riemann é: -quando é que as monodromias locais determinam o sistema local a menos de isomorfismo? No caso afirmativo dizemos que o sistema local é rígido. Esta noção foi estudada pela primeira vez, na última década por N. Katz e Carlos Simpson. Este é um conceito interessante pois quase todas as equações diferencias conhecidas têm associados sistemas locais que são rígidos. É interessante salientar que a classificação dos sistemas locais de rank $k$ sobre $\mathbb{P}^1 \setminus \{x_0, \cdots, x_n\}$ corresponde a dar $n+1$ matrizes invertíveis de rank $k$ definidas a menos de conjugação simultânea, e que o conceito de rigidez corresponde a um enfraquecimento desta condição, uma vez que passa a ser só dada a classe de conjugação de cada matriz.

Na sequência da generalização das ideias de Riemann a questão que se coloca é saber quando é que um sistema local é rígido. O lema de Simpson fornece uma resposta parcial a esta questão, ao dar uma condição suficiente para a rigidez de um sistema local de rank $k$ sobre $\mathbb{P}^1 \setminus \{x_0, \cdots, x_n\}$.

# Capítulo 1

# Grupos e Algebras de Lie

Neste capítulo apresentaremos as noções de grupos e álgebras de Lie estritamente necessárias à compreensão do Lema de Simpson. Para a elaboração deste capítulo foram consultadas as Referências Bibliográficas: [1], [5], [6], [13], [14], [16] e [17].

**Definição 1.0.1** *Um* ***grupo de Lie*** $G$ *é uma variedade analítica complexa de dimensão finita munida de uma estrutura de grupo para a qual a multiplicação*

$$\begin{aligned} .: G \times G &\longrightarrow G \\ (g,h) &\longmapsto g.h \end{aligned}$$

*e a inversão*

$$\begin{aligned} ^{-1}: G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

*são holomorfas. O elemento unidade será designado por* $e$.

O grupo de Lie $G$ será suposto de **base numerável**.

Para cada $g \in \mathrm{G}$ as aplicações

$$\begin{aligned} L_g: G &\longrightarrow G, \\ h &\longmapsto gh \end{aligned} \qquad \begin{aligned} R_g: G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto hg \end{aligned}$$

são, respectivamente, a **translação esquerda** e a **translação direita** por $g$. Como $L_g \circ L_h = L_{gh}$ e $R_g \circ R_h = R_{gh}$, $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ e $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$; logo $L_g$ e $R_g$ são difeomorfismos.

Um campo vectorial em $X$ diz-se **invariante à esquerda** se é $L_g$--invariante para qualquer $h \in \mathrm{G}$, i.e. se

$$X_{gh} = L_{g^*}(X_h) \left( \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{d}L_g(X_h) \right) \quad \forall g, h \in G.$$

**Definição 1.0.2** *Dado um vector* $\xi \in \mathrm{T}_eG$, $X_\xi$ *é o seguinte campo vectorial:*

$$X_\xi(g) = \mathrm{d}L_g(e)(\xi) \qquad \forall g \in G.$$

Seja $\Theta_L(G)$ o conjunto dos campos vectoriais de $G$ invariantes à esquerda, então as aplicações

$$\begin{array}{rcl} \rho_1 \colon \Theta_L(G) & \longrightarrow & \mathrm{T}_eG, \\ X & \longmapsto & X_e \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \rho_2 \colon \mathrm{T}_eG & \longrightarrow & \Theta_L(G) \\ \xi & \longmapsto & \{g \mapsto X_\xi(g)\} \end{array}$$

satisfazem $\rho_1 \circ \rho_2 = id_{\mathrm{T}_eG}$ e $\rho_2 \circ \rho_1 = id_{\Theta_L(G)}$, consequentemente $\mathrm{T}_eG$ e $\Theta_L(G)$ são espaços vectoriais isomorfos. $\Theta_L(G)$ é uma subálgebra de Lie de $\Theta(G)$ pois para qualquer $f \in \mathcal{O}_G(G)$, $g, h \in G$ temos

$$\begin{array}{rcl} L_{g^*}[X,Y]_h(f) & = & \mathrm{d}L_g\left(X_h(Yf) - Y_h(Xf)\right) \\ & = & \mathrm{d}L_g X_h(Yf) - \mathrm{d}L_g Y_h(Xf) \\ & = & X_{gh}(Yf) - Y_{gh}(Xf) \\ & = & [X,Y]_{gh}(f). \end{array}$$

Podemos então definir uma álgebra de Lie em $\mathrm{T}_eG$ dada por $[\xi, \eta] = [X_\xi, X_\eta](e)$ para cada $\xi, \eta \in \mathrm{T}_eG$.

**Definição 1.0.3** *O espaço vectorial* $\mathrm{T}_eG$ *con esta estrutura de álgebra de Lie é chamado a* ***álgebra de Lie*** *de* $G$ *e é denotado por* $\mathfrak{g}$, *ou, se houver algum perigo de confusão, por* $\mathfrak{g}_G$ *ou* $\mathcal{L}(G)$.

Para cada $\xi \in \mathrm{T}_eG$ seja $\phi_\xi$ a curva integral de $X_\xi$ que passa em $t = 0$.

$$\begin{array}{rcl} \phi_\xi \colon \mathbb{C} & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & \exp(t\xi) \end{array}$$

Como $X_\xi$ é invariante à esquerda o seu fluxo é completo. Com efeito o domínio de existência da curva integral de $X_\xi$ com condição inicial $g$ é o mesmo que o correspondente á condição $e$, pois se $c(t)$ é uma curva integral em $e$, $g.c(t)$ é uma curva integral em $g$. Consequentemente $\phi_\xi$ está definido para todo o $t \in \mathbb{C}$.

O próximo argumento mostra que para quaisquer $s, t \in \mathbb{C}$,

$$\phi_\xi(s+t) = \exp(s+t)\xi = \exp(s\xi)\exp(t\xi) = \phi_\xi(s)\phi_\xi(t) \tag{1.1}$$

i.e. $\phi_\xi$ é um homomorfismo analítico do grupo (aditivo) $\mathbb{C}$ em $G$. Fixemos $s \in \mathbb{C}$ e definamos

$$\begin{array}{rcl} \Psi\colon \mathbb{C} & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & \phi_\xi(s)\phi_\xi(t) = L_{\phi_\xi(s)}\phi_\xi(t) \end{array}$$

então $\Psi$ é uma curva integral de $X_\xi$ com condição inicial $\phi_\xi(s)$ em $t = 0$ pela invariância à esquerda de $X_\xi$. Porém

$$\begin{array}{rcl} \theta\colon \mathbb{C} & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & \phi_\xi(s+t) \end{array}$$

é uma curva integral de $X_\xi$ com condição inicial $\phi_\xi(s)$ em $t = 0$ pois $\theta(0) = \phi_\xi(s)$ e

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(s+t) = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}(s+t)}(s+t) = X_\xi\left(\theta(s+t)\right).$$

Consequentemente $\theta = \Psi$ devido à unicidade da solução.

**Definição 1.0.4** *A aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \exp\colon \mathrm{T}_e G & \longrightarrow & G \\ \xi & \longmapsto & \phi_\xi(1) \end{array}$$

*é chamada a* ***aplicação exponencial*** *da álgebra de Lie de $G$ em $G$.*

A aplicação exp é holomorfa. Com efeito seja $Z$ o campo vectorial em $G \times \mathfrak{g}$ definido por $Z(g,\xi) = (X_\xi(g), 0)$. Verificamos facilmente que o seu fluxo é $F_t(g,\xi) = (g, \exp t\xi, \xi)$. Como consequência da sua definição, $X_\xi(g) = \mathrm{d}L_g(e)(\xi)$ é holomorfa em $\xi$ e em $g$, logo $Z$ e consequentemente $F_1$ são holomorfas. Em particular $F_1(e,\xi) = (\exp \xi, \xi)$ é holomorfa em $\xi$, consequentemente exp é holomorfa. Temos que $\mathrm{d}\exp(0) = id_{\mathrm{T}_e G}$ pois

$$\mathrm{d}\exp(0)(\xi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp t\xi|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_\xi|_{t=0} = X_\xi\left(\phi_\xi(0)\right) = \xi.$$

Consequentemente, pelo teorema da função inversa, exp é um difeomorfismo local.

**Definição 1.0.5** *Um* ***subgrupo de Lie*** *$H$ de um grupo de Lie $G$ é um subgrupo de $G$ para o qual a inclusão $i\colon H \hookrightarrow G$ é uma imersão, i.e. $i(H)$ é uma subvariedade imersa de $G$.*

**Proposição 1.0.6** *Seja $H$ um subgrupo fechado de um grupo de Lie $G$, então $H$ é uma subvariedade de $G$ e em particular é um subgrupo de Lie.*

Consideremos uma norma $\|.\|$ em $\mathfrak{g}_G$, $\xi_n \neq 0$ tal que $\exp \xi_n \in H$, $\xi_n \to 0$ e $\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|} \to \xi \in \mathfrak{g}_G$. Iremos mostrar que $\exp t\xi \in H$ para qualquer $t \in \mathbb{C}$. Como $\xi_n \to 0$, para cada $t \in \mathbb{C}$ existe uma sequência de inteiros $m_n$ tal que $m_n\|\xi_n\| \to t$ quando $n \to \infty$. Então $\exp(m_n\xi_n) \to \exp(t\xi)$, mas $\exp(m_n\xi_n) = (\exp(t\xi))^{m_n} \in H$ e $H$ é fechado logo $\exp t\xi \in H$.

Seja $\mathfrak{g}_H = \{\xi \in \mathfrak{g}_G \mid \exp(t\xi) \in H\ \forall t \in \mathbb{C}\}$. Vamos mostrar que $\mathfrak{g}_H$ é um subespaço vectorial de $\mathfrak{g}_G$. É claro que $\mathfrak{g}_H$ é fechado para a multiplicação por escalares. Precisamos apenas de mostrar que é fechado para a adição. Seja $\xi_1$, $\xi_2 \in \mathfrak{g}_H$ e suponhamos que $\xi_1 + \xi_2 \neq 0$. Para $t$ suficientemente pequeno podemos escrever $\exp t\xi_1 \exp t\xi_2 = \exp(f(t))$ pois $f$ é um difeomorfismo na vizinhança de $e$. Como

$$\xi_1 + \xi_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp t\xi_1 \exp t\xi_2|_{t=0} \tag{1.2}$$

$\frac{1}{t}f(t) \to \xi_1 + \xi_2$ quando $t \to 0$. Consequentemente tomando $\xi_n = f(\frac{1}{n})$ e $\xi = \frac{\xi_1+\xi_2}{\|\xi_1+\xi_2\|}$, temos que $\exp t\xi \in H$ i.e. $\xi_1 + \xi_2 \in \mathfrak{g}_H$.

Escrevamos $\mathfrak{g}_G = \mathfrak{g}_H \oplus \mathfrak{g}'$ e consideremos o difeomorfismo $\phi(\xi, \xi') = \exp \xi \exp \xi'$ entre uma vizinhança de 0 em $\mathfrak{g}_G$ e uma vizinhança de $e$ em $G$. $\mathrm{D}\phi(0,0)(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 + \xi_2$ por 1.2, logo aplicando o teorema da função inversa temos que $\phi$ é um difeomorfismo local. Vamos utilizar esta aplicação para mostrar que exp aplica uma vizinhança de 0 em $\mathfrak{g}_H$ numa vizinhança de $e$ em $H$. Pois se assim não fosse existiria uma sequência$(\xi_n, .\xi'_n) \in \mathfrak{g}_H \oplus \mathfrak{g}'$ tal que $\exp \xi_n \exp \xi'_n \in H$, $\exp \xi_n \exp \xi'_n \to 0$ e $\xi'_n \neq 0$, mas $\exp \xi_n \in H$, logo $\exp \xi'_n \in H$, pelo que existe uma subsequência $\xi'_{n_k}$ tal que $\frac{\xi'_{n_k}}{\|\xi'_{n_k}\|} \to \xi$ em $\mathfrak{g}'$ (por compacidade). Porém tal implicaria que $\xi \in \mathfrak{g}_H$, o que é absurdo.

Pelo atrás exposto temos que exp fornece uma carta de $G$ adaptada a $H$ numa vizinhança de $e$ modelizada em $\mathfrak{g}_H$. Por translação á esquerda $H$ é uma subvariedade na vizinhança de cada um dos seus pontos. □

**Definição 1.0.7** *Seja $M$ uma variedade analítica complexa. Uma **acção** de um grupo de Lie $G$ em $M$ é uma aplicação holomorfa $\Phi\colon G \times M \to M$ tal que*
*i) para qualquer $x \in M$ $\Phi(e, x) = x$*
*ii) para quaisquer $g, h \in G$ e $x \in M$, $\Phi(g, \Phi(h, x)) = \Phi(gh, x)$*

**Exemplo 1.0.8**

$$\begin{array}{rcl} \Phi\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \\ (\mathbf{A}, \mathbf{M}) & \longmapsto & \mathbf{AMA}^{-1} \end{array}$$

*é uma acção.*

Para qualquer $g \in G$ seja

$$\begin{array}{rcl}\Phi_g \colon M & \longrightarrow & M \\ x & \longmapsto & \Phi(g,x)\end{array}$$

com esta notação podemos escrever i) e ii) da seguinte forma
i) $\Phi_e = id_M$
ii) $\Phi_{gh} = \Phi_g \circ \Phi_h$.
Como $(\Phi_g)^{-1} = \Phi_{g^{-1}}$ $\Phi_g$ é um difeomorfismo.

**Definição 1.0.9** *Seja $\Phi$ uma acção de $G$ em $M$. Para cada $x \in M$ a **órbita** de $x$ é dada por*

$$G.x = \{\Phi_g(x) \mid g \in G\}.$$

**Exemplo 1.0.10** *A classe de conjugação $\mathcal{C}_{\mathbf{M}}$ da matriz $\mathbf{M}$ é a órbita de $\mathbf{M}$ pela a acção dada no Exemplo 1.0.8*

A relação de pertença à mesma $\Phi$ -órbita é uma relação de equivalência em $M$. $M/G$ denota o conjunto das classes de equivalência, i.e. $M/G$ é o conjunto das $\Phi$ -órbitas. Seja

$$\begin{array}{rcl}\pi \colon M & \longrightarrow & M/G \\ x & \longmapsto & [x]\end{array}$$

onde $[x]$ é a $\Phi$ -órbita que contém $x$. Introduzimos em $M/G$ a topologia final induzida pela a aplicação $\pi$, i.e. a topologia mais fina que torna $\pi$ contínua.

**Proposição 1.0.11** *Seja $\Phi\colon G \times M \to M$ uma aplicação holomorfa e $R = \{(m, \Phi_g(m)) \in M \times M \mid (g,m) \in G \times M\}$. Se $R$ é um subconjunto fechado de $M \times M$, então a topologia quociente em $M/G$ é Hausdorff.*

**Demonstração:** Suponhamos que $M/G$ não é Hausdorff, então existem dois pontos distintos $[x]$, $[y] \in M/G$ tais que para quaisquer pares de vizinhanças $U^x$ de $[x]$ e $U^y$ de $[y]$, $U^x \cap U^y \neq \varnothing$. Sejam $(x_i)$, $(y_i)$ sucessões tais que $x_i \to x$, $y_i \to y$, $i = 1, 2 \cdots$ Sejam $\mathcal{V}_i^x$, $\mathcal{V}_i^y$, sistemas fundamentais de vizinhanças em $M$ de $x_i$, $y_i$ respectivamente. Sejam $W_i^x = \bigcup_{g \in G} \Phi_g V_i^x$ e $W_i^y = \bigcup_{g \in G} \Phi_g V_i^y$. Escolhendo $U_i^x = \pi(W_i^x)$ e $U_i^y = \pi(W_i^y)$, têm de existir $g_i, h_i \in G$ e $x_i \in V_i^x$, $y_i \in V_i^y$, tais que $\Phi_{g_i}(x_i) = \Phi_{h_i}(y_i)$, i.e. $y_i = \Phi_{h_i^{-1} g_i}(x_i)$.

Mas $x_i \to x$ e $y_i \to y$ quando $i \to \infty$, consequentemente a sucessão de pontos $(x_i, \Phi_{h_i^{-1} g_i}(x_i)) \in R$ converge. Então o limite pertence a $R$ pois $R$ é fechado, ou seja $(x, y) \in R$, i.e. $y = \Phi_g(x)$ para algum $g \in G$ logo $[x] = [y]$.

$\square$

O próximo Teorema dá uma condição necessária e suficiente para que $M/G$ seja uma variedade analítica complexa.

**Teorema 1.0.12** *Seja $\Phi\colon G \times M \to M$ uma acção holomorfa e $R = \{(m, \Phi_g(m)) \in M \times M \mid (g,m) \in G \times M\}$. Então $R$ é uma subvariedade fechada de $M \times M$ se e só se $M/G$ tem uma estrutura de variedade analítica complexa tal que $\pi\colon M \to M/G$ é uma submersão.*

**Demonstração: Suficiencia**) Suponhamos que $R$ é uma subvariedade fechada de dimensão $r$ de $M \times M$ que tem dimensão $2n$.

• Primeiro vamos mostrar que $R$ é localmente o grafo de uma submersão holomorfa de $M$ em $M$, i.e. para qualquer $x \in M$ existe um aberto $U \subset M$ tal que $x \in U$, uma subvariedade $N \subset M$ e uma submersão holomorfa $\rho\colon U \subset M \to N \subset M$ tal que para cada $u \in U$, $\rho(u) \in N$ se e só se $(u, \rho(u)) \in R$.

Como $R$ é uma subvariedade de $M \times M$ a aplicação

$$\begin{array}{rcl} R & \longrightarrow & M \\ (x, \Phi_g(x)) & \longmapsto & x \end{array}$$

é uma submersão, pelo Teorema da fibração local [1] podemos encontrar um aberto $U_0 \subset M$ e uma aplicação $\eta\colon U_0 \times U_0 \subset M \times M \to \mathbb{C}^m$ tal que $\eta^{-1}(0) = (U_o \times U_o) \cap R$ e

$$\begin{array}{rcl} \eta_x = \eta_{1,x}\colon U_0 & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \\ y & \longmapsto & \eta(x,1) \end{array}$$

é uma submersão. Tal implica que $n \geq m$ e que $\eta_x^{-1}(0)$ é uma subvariedade de $U_0$ com $\mathrm{T}_x\eta_x^{-1}(0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} E$, a qual tem dimensão $n-m$.

Seja $F$ um complementar de $E$ em $\mathrm{T}_xM$. Restringindo $U_0$ se necessário, existe uma submersão $\xi\colon U_0 \to \mathbb{C}^{n-m}$ tal que $\xi^{-1}(0) = N$ é uma subvariedade com $x \in N$ e $\mathrm{T}_x\xi^{-1}(0) = F$, que tem dimensão $m$. Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \zeta\colon U_0 \times U_0 & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m} \\ (y,z) & \longmapsto & (\eta(y,z), \xi(z)) \end{array}$$

então $\zeta(x,x) = (0,0)$ e a aplicação

[1] **Teorema (Fibração local)** Seja $f\colon M \to N$ uma aplicação holomorfa tal que $\mathrm{D}f(x)$ tem rank localmente constante. Sejam $Z \subset M$ uma subvariedade, $x \in M$, $y \in N$ fixos e suponhamos que $\mathrm{T}_xM = \mathrm{T}_xZ + \mathrm{T}_xf^{-1}(y)$. Então existem vizinhanças $U$ de $x$, $V$ de $y$ tais que $f(U)$ é uma subvariedade de $N$ e $f$ induz um difeomorfismo de $f^{-1}(V) \cap Z \cap U$ em $f(U) \cap V$.

$$\begin{array}{rcl} \zeta_x\colon U_0 & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m} \\ z & \longmapsto & (\zeta_x(z), \xi(z)) \end{array}$$

é tal que $\mathrm{D}\zeta_x(x)\colon \mathrm{T}_x M \to \mathrm{T}_{\xi_x(x)}\mathbb{C}^n$ é bijectiva pois $\ker \mathrm{D}\zeta_x(x) = \ker \mathrm{D}\eta_x(x) \cap \ker \mathrm{D}\xi_x(x) = E \cap F = \{0\}$ e $dim \mathrm{T}_x M = n$. Consequentemente por aplicação do Teorema da função implícita a $\zeta$, temos que existe um aberto $U_1 \subset U_0$ tal que $x \in U_1$ e uma função holomorfa $\rho\colon U_1 \subset M \to U_1$ com $\rho(x) = x$, tal que $\zeta^{-1}(0,0) = \{(u, \rho(u)) \in U_1 \times U_1 \subset U \times U \mid u \in U_1\}$. Para qualquer $u \in U_1$, $\zeta(u, \rho(u)) = 0$, tal implica que $(u, \rho(u)) \in (U_1 \times U_1) \cap R$ e $\xi(\rho(u)) = 0$, i.e. $\rho(u) \in N$. Falta apenas mostrar que $\rho$ é uma submersão numa vizinhança de $x$. Diferenciando $\eta(u, \rho(u)) = 0$ em $(x, x) = (x, \rho(x))$ temos

$$0 = \mathrm{D}\eta_{2,x}(x) + \mathrm{D}\eta_{1,x}(x) \circ \mathrm{D}\rho(x)$$

onde $\eta_{1,x}$, $\eta_{2,x}$ são as aplicacões

$$\begin{array}{rcl} \eta_{1,x}\colon U_1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \\ z & \longmapsto & \eta(x,z) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \eta_{2,x}\colon U_1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \\ z & \longmapsto & \eta(z,x) \end{array}$$

consequentemente rank $\mathrm{D}\eta_{2,x}(x) \leq$ rank $\mathrm{D}\rho(x)$. Mas $R$ é invariante por acção do difeomorfismo

$$\begin{array}{rcl} j\colon M \times M & \longrightarrow & M \times M \\ (y,z) & \longmapsto & (z,y) \end{array}$$

e $\eta_{2,x} = (\eta \circ j)_{1,x}$, consequentemente rank $\mathrm{D}\eta_{2,x}(x) =$ rank $\mathrm{D}\eta_{1,x}(x) = m$. Mas $dim\, N = m$ logo rank $\mathrm{D}\rho(x) = m$, i.e. $\rho$ é uma submersão numa vizinhança de $x$.

• De seguida vamos construir uma carta em $[x]$ de $M/G$.

Como $R$ é fechado, $M/G$ é um espaço de Hausdorff para a topologia quociente. Como $\mathrm{D}\rho(x)(\mathrm{T}_x M) = \mathrm{T}_x N$ e $\rho(x) = x$, existe uma carta $(U, \phi)$ em $x$ de $M$ tal que

$$\begin{array}{rcl} \phi \circ \rho \circ \phi^{-1}\colon \phi(U) = V \times W \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m} & \longrightarrow & V \times \{0\} \subset \mathbb{C}^m \times \{0\}. \\ (u,v) & \longmapsto & (v, 0) \end{array} \tag{1.3}$$

Consequentemente, para qualquer $u \in U$, $u^1 = \rho(u)$ se e só se $\pi_1 \circ \phi(u) = \pi_1 \circ \phi(u^1)$, onde

$$\begin{array}{rcl} \pi_1\colon V \times W & \longrightarrow & V. \\ (v,w) & \longmapsto & w \end{array}$$

Definamos

$$\begin{array}{rcl} \omega\colon V \subset \mathbb{C}^m & \longrightarrow & \pi(U) \subset M/G \\ V & \longmapsto & \pi \circ \phi^{-1}(v,0) \end{array}$$

então $\omega$ é injectiva, pois se $\pi \circ \phi^{-1}(v,0) = \pi \circ \phi^{-1}(v^1,0)$ então $(\phi^{-1}(v,0), \phi^{-1}(v^1,0)) \in (U \times U) \cap R$, logo $\rho(\phi^{-1}(v,0)) = \phi^{-1}(v^1,0)$, consequentemente $v = \pi_1(\phi\circ\rho\circ\phi^{-1}(v,0)) = \pi_1(\phi\circ\phi^{-1}(v^1,0)) = v^1$ por 1.3. Como $\pi$, $\phi$ são aplicações contínuas e abertas, $\omega$ é um homeomorfismo. Portanto $(\pi^{-1}(U), \omega^{-1})$ é uma carta de $M/G$ em $[x] = \pi(x)$.

• De seguida vamos mostrar que duas cartas $(\pi(U), \omega^{-1})$ e $(\pi(\tilde{U}), \tilde{\omega}^{-1})$ em $[x]$ são compatíveis.

Seja $Y = \pi^{-1}(\pi(U)\cap\pi(\tilde{U}))\cap U \subset U\cap\tilde{U}$ e $\tilde{Y} = \pi^{-1}(\pi(U)\cap\pi(\tilde{U}))\cap\tilde{U} \subset U\cap\tilde{U}$, em particular $Y = \pi^{-1}(\pi(U)\cap\pi(\tilde{U}))\cap U\cap\tilde{U} = \tilde{Y}$. O argumento seguinte mostra que para qualquer $v \in \pi_1\phi(Y) = V$ existe um e um só $\tilde{v} \in \tilde{\pi}_1\tilde{\phi}(\tilde{Y}) = \tilde{V}$ tal que

$$\pi(\phi^{-1}(v,w)) = \pi(\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{v},\tilde{w})),$$

onde $W = \pi_2(\phi(Y))$, $\tilde{W} = \tilde{\pi}_2(\tilde{\phi}(\tilde{Y}))$ e

$$\begin{array}{rcl} \pi\colon V \times W & \longrightarrow & W. \\ (v,w) & \longmapsto & w \end{array}$$

Para quaisquer $w$, $w' \in W$

$$\begin{array}{rcl} v = \pi_1(\phi\circ\phi^{-1}(v,w)) & = & \pi_1(\phi\circ\phi^{-1}(v,w^1)) \;\;\Rightarrow \\ & \Rightarrow & \phi\circ\rho\circ\phi^{-1}(v,w) = \phi\circ\rho\circ\phi^{-1}(v,w^1) \\ & \Rightarrow & \rho\circ\phi^{-1}(v,w) = \rho\circ\phi^{-1}(v,w^1) \\ & \Rightarrow & \pi\circ\rho\circ\phi^{-1}(v,w) = \pi\circ\rho\circ\phi^{-1}(v,w^1) \\ & \Rightarrow & \pi\circ\phi^{-1}(v,w) = \pi\circ\phi^{-1}(v,w^1), \end{array}$$

consequentemente, para qualquer $w \in W$, $\pi\circ\phi^{-1}(v,w) = \pi\circ\phi^{-1}(v,W)$, analogamente para qualquer $\tilde{w} \in \tilde{W}$, $\pi\circ\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{v}^1,\tilde{w}) = \pi\circ\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{v}^1,\tilde{W})$. Como $Y = \phi^{-1}(V\times W)$, $\tilde{Y} = \tilde{\phi}^{-1}(\tilde{V}\times\tilde{W})$, então para quaisquer $(v,w) \in V\times W$ existe $(\tilde{v},\tilde{w}) \in \tilde{V}\times\tilde{W}$ tal que

$$\pi(\phi^{-1}(v,W)) = \pi(\phi^{-1}(v,w)) = \pi(\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{v},\tilde{w})) = \pi(\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{v},\tilde{W})) \qquad (1.4)$$

Suponhamos que existe $(\tilde{v}^1,\tilde{w}^1) \in \tilde{V}\times\tilde{W}$ tal que $\pi(\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{v}^1,\tilde{w}^1)) = \pi(\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{v},\tilde{w}))$, o que implica que $\tilde{v}^1 = \pi_1(\tilde{\phi}\circ\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{v}^1,\tilde{w}^1)) = \pi_1(\tilde{\phi}\circ\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{v},\tilde{w})) = \tilde{v}$, consequentemente $\tilde{v}$ é univocamente determinado pelo que podemos definir a função

$$\begin{array}{rcl} \psi\colon V\subset \mathbb{C}^m & \longrightarrow & \tilde{V}\subset \mathbb{C}^m. \\ v & \longmapsto & \tilde{v} \end{array}$$

Vamos mostrar que $\psi$ é holomorfa. Como por 1.4 $\pi(\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{v},\tilde{w})) = \pi(\phi^{-1}(v,w))$ então $(\phi^{-1}(v,w),\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{v},\tilde{w})) \in R$, logo existe $g \in G$ tal que $\Phi_g(\phi^{-1}(v,w)) = \tilde{\phi}^{-1}(\tilde{v},\tilde{w})$. Como $\Phi_g$ é um difeomorfismo existe um aberto $U \subset M$ tal que $x \in U \subset Y$ e $\Phi_g(U) \subset \tilde{Y}$, consequentemente a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\phi}\circ\Phi_g\circ\phi^{-1}\colon \phi(Y)\subset V\times W\subset \mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^{n-m} & \longrightarrow & \tilde{\phi}(\tilde{Y})\subset \tilde{V}\times\tilde{W} \\ (v,w) & \longmapsto & (\psi(v),\theta(v,w)) \end{array}$$

é holomorfa, logo $\psi$ é holomorfa. Por 1.4 temos então que as cartas em $[x]$ $(\pi(U),\omega^{-1})$, $(\pi(\tilde{U}),\tilde{\omega}^{-1})$ são compatíveis, logo $M/G$ é uma variedade analítica complexa.

- $\pi$ é uma submersão.

Sejam $(U,\phi)$ e $(\pi^{-1}(U),\omega^{-1})$ cartas em $x \in m$ e $[x] \in M/G$ respectivamente, então

$$\begin{array}{rcl} \omega^{-1}\circ\pi\circ\phi^{-1}\colon \phi(U)\subset V\times W\subset \mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^{n-m} & \longrightarrow & V\subset \mathbb{C}^{n-m} \\ (v,w) & \longmapsto & v \end{array}$$

é uma submersão holomorfa, tal implica que $\pi\colon M \to M/G$ é uma submersão holomorfa.

**Necessidade**

Como $\Delta_{M/G} = \{([x],[y]) \in M/G \times M/G \mid [x] \in M/G\}$ é uma subvariedade fechada de $M/G \times M/G$ e

$$\begin{array}{rcl} \pi\times\pi\colon M\times M & \longrightarrow & M/G\times M/G \\ (x,y) & \longmapsto & ([x],[y]) \end{array}$$

é uma submersão, $(\pi\times\pi)^{-1}\Delta_{M/G} = R$ é uma subvariedade fechada de $M\times M$.

$\square$

**Corolário 1.0.13** *Uma aplicação $\phi\colon M/G \to N$ é holomorfa se e só se $\phi\circ\pi\colon M \to N$ é holomorfa.*

**Demonstração:**

$\Rightarrow$ ) Se $\phi$ é holomorfa então $\phi\circ\pi$ é holomorfa pois $\pi$ é holomorfa.

$\Leftarrow$ ) Sejam$(U, \varphi)$ carta de $M$ em $x$, $(\pi(U), \omega^{-1})$ carta de $M/G$ em $[x]$ e $(\tilde{U}, \psi)$ carta de $N$ em $\phi([x])$ tal que $\phi(\pi(U)) \subset \tilde{U}$. Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rrrr, "\phi \circ \pi"] \arrow[drr, "\pi"] \arrow[ddddd, "\varphi"'] & & \text{①} & & \tilde{U} \arrow[ddddd, "\psi"] \\
& & \pi(U) \arrow[urr, "\phi"'] \arrow[dd, "\omega^{-1}"] & & \\
& \text{②} & & \text{④} & \\
& & V \arrow[ddll, shift left, "i_1"'] \arrow[ddrr, dotted, "\chi \circ i_1"] & & \\
& & \text{③} & & \\
V \times W \arrow[uurr, shift left, "\pi_1"'] \arrow[rrrr, "\chi"'] & & & & \overline{U}
\end{tikzcd}$$

onde $i_1$ é a aplicação holomorfa

$$\begin{aligned} i_1 \colon V &\longrightarrow V \times W. \\ v &\longmapsto (v, w) \end{aligned}$$

Temos que $\psi \circ \phi \circ \pi = \chi \circ \varphi = \chi \circ i_1 \circ \omega^{-1} \circ \pi$, como $\pi$ é um epimorfismo então $\psi \circ \phi = (\chi \circ i_1) \circ \omega^{-1}$, logo o rectângulo ④ é comutativo e $\chi \circ i_1$ é holomorfa, consequentemente $\phi \colon M/G \to N$ é holomorfa. $\square$

O próximo resultado é um corolário de 1.0.12 referente a grupos de Lie.

**Corolário 1.0.14** *Seja $H$ um subgrupo fechado de um grupo de Lie $G$. Se*

$$\begin{aligned} \Phi \colon H \times G &\longrightarrow G \\ (h, g) &\longmapsto gh \end{aligned}$$

*então $G/H$ é uma subvariedade e $\pi \colon G \to G/H$ é uma submersão.*

**Demonstração:** Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \xi\colon G\times G & \longrightarrow & G \\ (g,k) & \longmapsto & kg^{-1}=m(i(g),k) \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rcl} m\colon G\times G & \longrightarrow & G \\ (g,k) & \longmapsto & g.k \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} i\colon G & \longrightarrow & G. \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

Como $\mathrm{D}\xi(g,k)(r,s)=\mathrm{D}m_{i(g)}(k)\circ\mathrm{D}i(g)(r)+\mathrm{D}m_k(g)(s)$, onde

$$\begin{array}{rcl} m_g\colon G & \longrightarrow & G \\ k & \longmapsto & gk=L_g(k) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} m_k\colon & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & gk=R_k(g) \end{array}$$

logo $\mathrm{D}\xi(g,k)(r,s)=\mathrm{D}L_{i(g)}(k)\circ\mathrm{D}i(g)(r)+\mathrm{D}R_k(g)(s)$. Consequentemente $\mathrm{D}\xi(g,k)(0,s)=\mathrm{D}R_k(g)(s)$, logo $\mathrm{D}(g,k)$ é sobrejectiva pois $\mathrm{D}R_k(g)$ é um isomorfismo, logo $\xi$ é uma submersão. Como $H$ é um subgrupo fechado de $G$ pela Proposição 1.0.6 $H$ é uma subvariedade de $G$, consequentemente $\xi^{-1}(H)$ é uma subvariedade fechada de $G\times G$. Mas $(g,k)\in\xi^{-1}(H)$ se e só se $kg^{-1}\in H$, i.e. se e só se $(g,k)\in R=\{(g,hg)\in G\times G \mid g\in Gh\in H\}$, logo $\xi^{-1}(H)=R$ é uma subvariedade fechada de $G\times G$, pelo Teorema 1.0.12 temos então que $G/H$ é uma variedade e $\pi\colon G\to G/H$ é uma submersão. $\square$

Seja $\Phi\colon G\times M\to M$ uma acção holomorfa e $x\in M$, $G_x=\{g\in G \mid \Phi_g(x)=x\}$ é chamado o **grupo de isotropia** de $\Phi$ em $x$. Como $G_x=\Phi_x^{-1}(x)$ e

$$\begin{array}{rcl} \Phi_x\in G & \longrightarrow & M \\ g & \longmapsto & \Phi(g,x) \end{array}$$

é contínua, $G_x$ é um subgrupo fechado de $G$ e consequentemente pela Proposição 1.0.6 é uma subvariedade analítica complexa. Como $\Phi_x(gh)=\Phi_g\circ\Phi_h(x)$ $=\Phi_g(x)$ para qualquer $h\in G_x$, $\Phi_x$ induz uma aplicação

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\Phi}_x\colon G/G_x & \longrightarrow & G.x\subset M. \\ gG_x & \longmapsto & \Phi_g(x) \end{array}$$

Esta aplicação é injectiva pois se $\Phi_g(x)=\Phi_h(x)$, então $g^{-1}h\in G_x$ i.e., $gG_x=hG_x$.

**Corolário 1.0.15** *Se $\Phi\colon G\times M\to M$ é uma acção e $x\in M$, então $\tilde{\Phi}\colon G/G_x\to Gx$ é uma imersão injectiva.*

**Dmonstração:** Comecemos por observar que por aplicação do Corolário 1.0.13 $\tilde{\Phi}_x\colon G/G_x\to Gx\subset M$ é holomorfa, pois $\tilde{\Phi}_x\circ\pi=\Phi_x$, relembremos que já mostrámos que $\tilde{\Phi}_x$ é injectiva. Para mostrar que é uma imersão, vamos provar que $\mathrm{D}\tilde{\Phi}_x([g])([\xi])$ é injectiva, mas $\mathrm{D}\tilde{\Phi}_x([g])([\xi]) = \mathrm{D}\Phi_x(g)(\xi)$, consequentemente $\mathrm{D}\tilde{\Phi}_x$ é injectiva se pudermos mostrar que $\mathrm{T}_g G_x = \{\xi \in \mathrm{T}_g G \mid \mathrm{D}\Phi_x(g)(\xi) = 0\}$. A inclusão $\subset$ é óbvia, para a inclusão oposta vamos começar por supor que $g = e$. Seja então $\xi \in \mathfrak{g}$ satisfazendo $\mathrm{D}\Phi_x(g)(\xi) = 0$, então

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_x(\exp t\xi) = \mathrm{D}\Phi_x(\exp t\xi)\mathrm{D}(L_{\exp t\xi})(\xi).$$

Para qualquer $g \in G$, $x \in M$ temos a igualdade:

$$\Phi_x \circ L_g = \Phi_g \circ \phi_x,$$

derivando em $e$ temos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_x(\exp t\xi) \circ \mathrm{D}L_g(e)(\xi) = \mathrm{D}\Phi_g(x) \circ \mathrm{D}\Phi_x(e)(\xi),$$

tomando $g = \exp t\xi$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_x(\exp t\xi) = \mathrm{D}\Phi_{\exp t\xi}(x) \circ \mathrm{D}\Phi_x(e)(\xi).$$

Consequentemente $\Phi_x(\exp t\xi) = \Phi_x(e) = x$, logo $\xi \in \mathrm{T}_e G_x$ o que mostra a inclusão para $g = e$. Para o caso geral notemos que o isomorfismo $\mathrm{D}L_g(e)\colon \mathrm{T}_e G \to \mathrm{T}_g G$ satisfaz $\mathrm{D}L_g(e)(\mathrm{T}_e G) = \mathrm{T}_g G$, $\mathrm{D}L_g(e)(\{\xi \in \mathrm{T}_e G \mid \mathrm{D}\Phi_x(e)(\xi) = 0\}) = \{\eta \in \mathrm{T}_g G \mid \mathrm{D}\Phi_x(g(\eta)) = 0\}$ o que prova a inclusão $\supset$, logo $\tilde{\Phi}_x$ é uma imersão. $\square$

**Exemplo 1.0.16**

Dado $M \in \mathrm{M}_{m\times m}(\mathbb{C})$ temos que $\tilde{\Phi}_M\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})_M \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).M$ é um difeomorfismo local. Por aplicação do Corolário 1.0.15 temos que $\tilde{\Phi}_M$ é uma imersão. Seja $(V_i)_{i\in I}$ uma cobertura localmente finita de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})_M$ por compactos, como $\tilde{\Phi}_M|_{V_i}\colon V_i \to \tilde{\Phi}_M(V_i)$ é uma bijecção contínua de um compacto num Hausdorff $\tilde{\Phi}_M|_{V_i}$ é um homeomorfismo, consequentemente $\tilde{\Phi}_M$ é um homeomorfismo local. Como $\tilde{\Phi}_M$ é uma imersão e um homeomorfismo local então é um difeomorfismo local.

Em particular temos que

$$dim\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).M = n^2 - dim\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})_M.$$

**Definição 1.0.17** *Dado um grupo $G$, $\zeta G$ denota o **centro** de $G$, onde*

$$\zeta G = \{x \in G \mid gx = xg\ \forall g \in G\}.$$

Uma vez que temos uma acção de $G$ em $G$ dada por

$$\begin{array}{rcl} \Phi\colon G \times G & \longrightarrow & G \\ (g, x) & \longmapsto & g^{-1}xg \end{array}$$

e como $\Phi_x^{-1}(\{x\}) = G_x$ é fechado para qualquer $x \in G$, temos que $\zeta G = \bigcap_{x \in G} \Phi_x^{-1}(\{x\})$ é fechado.

**Exemplo 1.0.18** *O centro de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *é o subconjunto das matrizes escalares não nulas* $a\mathbf{1}_n$*, tal que* $a \in \mathbb{C}^*$.

**Demonstração:** É claro que $\{a\mathbf{1}_n \mid a \in \mathbb{C}^*\} \subset \zeta\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Denotemos por $\mathbf{E}_{ij}$ a matriz $n \times n$ que toma o valor 1 na entrada $(i, j)$ e 0 nas restantes. Seja $\mathbf{A} \in \zeta\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, como $\mathbf{1}_n + \mathbf{E}_{ij} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ temos que $(\mathbf{1}_n + \mathbf{E}_{ij})\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{1}_n + \mathbf{E}_{ij})$, logo $\mathbf{A}\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}$. A entrada $(k, j)$ de $\mathbf{A}\mathbf{E}_{ij}$ é $a_{ki}$ enquanto que a de $\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}$ é 0 se $k \neq j$ e $a_{ii} = a_{jj}$ caso contrário. Consequentemente $a_{ki} = 0$ se $k \neq i$ e $a_{ii} = a_{jj}$ o que mostra que $\mathbf{A}$ é escalar. $\square$

**Definição 1.0.19** $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$ *é por definição o seguinte quociente*

$$\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})/\zeta\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

Como $\zeta\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ é um subgrupo fechado do grupo de Lie $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, pela Proposição 1.0.6 temos que $\zeta\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ é um subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Por aplicação do Corolário 1.0.14 temos que $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$ é um grupo de Lie.

Salientamos ainda que $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$ actua em $\mathrm{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ por intermédio da acção

$$\begin{array}{rcl} \Phi\colon \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C}) \times \mathrm{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_{n \times n}(\mathbb{C}). \\ (\mathbf{A}\zeta\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \mathbf{M}) & \longmapsto & \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}^{-1} \end{array}$$

# Capítulo 2

# Teoria dos Feixes

Referências Bibliográficas utilizadas na elaboração deste capítulo, por subcapítulos: subcapítulo 2.1 [15], subcapítulo 2.2 [7] [15], subcapítulo 2.3 [10] [15] [18], subcapítulo 2.4 [15], subcapítulo 2.5 [15], subcapítulo 2.6 [8] [15] [18], subcapítulo 2.7 [4] [15] [20], subcapítulo 2.8 [18], subcapítulo 2.9 [15] [18], subcapítulo 2.10 [3] [7] [8] [10] [19].

## 2.1 Pré-feixes

**Definição 2.1.1** *Seja* $\mathrm{X}$ *um espaço topológico e* $\mathrm{F}$ *uma aplicação que associa a cada aberto* $\mathrm{U}$ *de* $\mathrm{X}$ *um grupo abeliano* $\mathrm{F}(\mathrm{U})$. *Seja* $\rho$ *uma aplicação que associa a cada par de abertos* $\mathrm{U}, \mathrm{V}$ *de* $\mathrm{X}$, $\mathrm{U} \supset \mathrm{V}$, *um morfismo de grupos abelianos*

$$\rho_{\mathrm{V},\mathrm{U}} \colon \mathrm{F}(\mathrm{U}) \longrightarrow \mathrm{F}(\mathrm{V}).$$

*Dizemos que o par* $(\mathrm{F}, \rho)$ *define um* ***pré-feixe de grupos abelianos*** *se*

*i) Para qualquer aberto* $\mathrm{U}$ *de* $\mathrm{X}$

$$\rho_{\mathrm{U},\mathrm{U}} = \mathrm{id}_{\mathrm{F}(\mathrm{U})}.$$

*ii) Se* $\mathrm{U}_1 \subset \mathrm{U}_2 \subset \mathrm{U}_3$ *então*

$$\rho_{\mathrm{U}_1,\mathrm{U}_2} \circ \rho_{\mathrm{U}_2,\mathrm{U}_3} = \rho_{\mathrm{U}_1,\mathrm{U}_3}.$$

*Os morfismos* $\rho_{\mathrm{V},\mathrm{U}}$ *são denominados os* ***morfismos de restrição*** *do pré-feixe* $\mathrm{F}$.

*Os elementos de* $\mathrm{F}(\mathrm{U})$ *são denominados as* ***secções*** *de* $\mathrm{F}$ *sobre* $\mathrm{U}$.

*Dada uma secção* $s$ *de* $\mathrm{F}$ *sobre* $\mathrm{U}$ *e um aberto* $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$, *define-se* $s|_{\mathrm{V}} = \rho_{\mathrm{V},\mathrm{U}}(s)$. *Se for necessário especificar o pré-feixe* $\mathrm{F}$ *designaremos por* $\rho^{\mathrm{F}}$ *a aplicação* $\rho$.

**Definição 2.1.2** *Sejam* $\mathrm{F}, \mathrm{G}$ *dois pré-feixes sobre* $\mathrm{X}$. *Seja* $f$ *uma aplicação que a cada aberto* $\mathrm{U}$ *de* $\mathrm{X}$ *associa um morfismo de grupos abelianos*

$$f(\mathrm{U}) : \mathrm{F}(\mathrm{U}) \longrightarrow \mathrm{G}(\mathrm{U}).$$

*Dizemos que* $f : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *é um* ***morfismo de pré-feixes*** *se, dados abertos* $\mathrm{U}, \mathrm{V}$ *de* $\mathrm{X}$, $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$, *o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F}(\mathrm{U}) \arrow[r, "f(\mathrm{U})"] \arrow[d, "\rho^{\mathrm{F}}_{\mathrm{V},\mathrm{U}}"'] & \mathrm{G}(\mathrm{U}) \arrow[d, "\rho^{\mathrm{G}}_{\mathrm{V},\mathrm{U}}"] \\
\mathrm{F}(\mathrm{V}) \arrow[r, "f(\mathrm{V})"'] & \mathrm{G}(\mathrm{V})
\end{tikzcd}$$

**Exemplo 2.1.3**

(i) Seja $\mathrm{X}$ um espaço topológico e $\mathrm{A}$ um anel. Associamos a cada aberto $\mathrm{U}$ de $\mathrm{X}$ o grupo abeliano $\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U}) = \{$*funções localmente constantes de* $\mathrm{U} \to \mathrm{A}\}$. Dados abertos $\mathrm{U}$, $\mathrm{V}$ de $\mathrm{X}$, com $\mathrm{V}$ contido em $\mathrm{U}$, seja $\rho_{\mathrm{V},\mathrm{U}} : \underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U}) \to \underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{V})$ a aplicação de restrição habitual.

Chamamos ao par $(\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}}, \rho)$ o pré-feixe das funções localmente constantes sobe $\mathrm{X}$.

(ii) De forma análoga, dada uma variedade analítica complexa, podemos definir o pré-feixe $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ das funções holomorfas sobre $\mathrm{X}$

(iii) Seja $\mathrm{X}$ uma superfície de Riemann e $\Sigma \subset \mathrm{X}$ um subconjunto discreto. Associamos a cada aberto $\mathrm{U}$ de $\mathrm{X}$ o grupo abeliano $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(*\Sigma)(\mathrm{U})$. Este é o subgrupo das funções holomorfas $\varphi$ sobre $\mathrm{U} \setminus \Sigma$ tais que para qualquer carta $\mathrm{V}$ contida em $\mathrm{U}$, onde $\Sigma \cap \mathrm{V}$ é definido pela anulação de uma coordenada local, i.e. $\Sigma \cap \mathrm{V} = \{z = 0\}$, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $z^n \varphi|_{\mathrm{V}}(z)$ é holomorfa em $\mathrm{V}$. Tomando para $\rho$ a restrição habitual, o par $(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(*\Sigma), \rho)$ é um pré-feixe, ao qual chamamos o pré-feixe das funções meromorfas com polos ao longo de $\Sigma$.

(iv) Seja $\frac{d}{dz}$ a aplicação que associa a cada aberto $\mathrm{U}$ de $\mathbb{C}$ e a cada $\varphi \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathrm{U})$ a secção $\frac{d\varphi}{dz} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathrm{U})$. A aplicação $\frac{d}{dz}$ é um endomorfismo do pré-feixe $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$.

(v) De forma análoga, dadas funções $a_k \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathrm{U})$, $0 \leq k \leq n$, o operador diferencial $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dz^k}$ define um endomorfismo do pré-feixe $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$.

Seja X um espaço topológico. Vamos associar a cada X uma categoria $\mathcal{O}pen\,(\mathrm{X})$. Os seus objectos são os abertos de X. Dados U, V abertos de X

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}pen(\mathrm{X})}\,(\mathrm{V},\mathrm{U}) = \begin{cases} (\mathrm{V},\mathrm{U}) & \text{se} \quad \mathrm{V} \subset \mathrm{U} \\ \varnothing & \text{se} \quad \mathrm{V} \not\subset \mathrm{U} \end{cases}$$

**Definição 2.1.4** *Dada uma categoria $\mathcal{C}$ e um espaço topológico X, chamamos **pré-feixe** sobre X com valores em $\mathcal{C}$ a um functor contravariante $\mathrm{F}\colon \mathcal{O}pen\,(\mathrm{X}) \to \mathcal{C}$.*

Definimos assim uma categoria

$$\text{pré} - \mathcal{S}h^{\mathcal{C}}\,(\mathrm{X}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}pen}\,(\mathcal{O}pen\,(\mathrm{X})\,,\mathcal{C})$$

onde os morfismos são as transformações naturais de functores contravariantes.

Dado U aberto de X, associamos a U o seguinte functor:

$$|_{\mathrm{U}}\colon \text{pré} - \mathcal{S}h^{\mathcal{C}}\,(\mathrm{X}) \longrightarrow \text{pré} - \mathcal{S}h^{\mathcal{C}}\,(\mathrm{U})\,,$$

definido por $\begin{cases} \mathrm{F}|_{\mathrm{U}}\,(\mathrm{V}) = \mathrm{F}\,(\mathrm{V}) \\ \mathrm{f}|_{\mathrm{U}}\,(\mathrm{V}) = \mathrm{f}\,(\mathrm{V}) \end{cases}$ para qualquer V aberto de U.

## 2.2 Limites indutivos

**Definição 2.2.1** *Dado um conjunto $I$ diz-se que uma relação binária $\leq$ é uma **quase ordem filtrante** se:*
*(i) é transitiva,*
*(ii) é reflexiva,*
*(iii) dados $i$, $j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ e $j \leq k$.*

**Definição 2.2.2** *Seja $J$ um subconjunto de $I$, $J$ diz-se **co-filtrante** em $I$ se para qualquer $i \in I$ existe $j \in J$ tal que $i \leq j$ e para qualquer $j \in J$ existe $i \in I$ tal que $j \leq i$.*

**Definição 2.2.3** *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Sejam $(E_i)_{i \in I}$ uma família de objectos de $\mathcal{C}$ e $(E_i \xrightarrow{f_{ij}} E_j)_{i \leq j}$ uma família de morfismos de $\mathcal{C}$. Dizemos que o par $((E_i),(f_{ij}))$ é um $I$ **-espectro indutivo** de $\mathcal{C}$ se:*

*(i) $f_{ii} = \mathrm{id}_{E_i}$, para qualquer $i \in I$,*

*(ii) se $i \leq j \leq K$ então $f_{kj} \circ f_{ji} = f_{ki}$, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo.*

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[d, "f_{ji}"'] \arrow[dr, "f_{ki}"] & \\ E_j \arrow[r, "f_{kj}"'] & E_k \end{tikzcd}$$

**Definição 2.2.4** *O par $(E, (f_i)_{i \in I})$ diz-se o **limite indutivo** do espectro indutivo $(E_i, f_{ij})$ na categoria $\mathcal{C}$ se*
*a) Se $i \leq j$ então $f_j f_{ji} = f_i$, i.e. o diagrama abaixo é comutativo.*

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[r, "f_{ji}"] \arrow[dr, "f_i"'] & E_j \arrow[d, "f_j"] \\ & E \end{tikzcd}$$

*b) Dado qualquer outro par $(F, (g_i)_{i \in I})$ que verifique a), então existe um e um só morfismo $f \colon E \to F$ tal que $f \circ f_i = g_i$ para qualquer $i \in I$, i.e. o diagrama abaixo é comutativo.*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, dotted, "f"] & \\ E_i \arrow[u, "f_i"] \arrow[r, "g_i"'] & F \end{tikzcd}$$

*O par $(E, (f_i)_{i \in I})$ será denotado por $\varinjlim_{i \in I} E_i$.*

**Proposição 2.2.5** *Se o limite indutivo existe é único a menos de isomorfismo.*

**Proposição 2.2.6** *Sejam $((E_i)_{i \in I}, (f_{ii'})_{i \leq i'})$, $((F_j)_{j \in J}, (f_{jj'})_{j \leq j'})$ espectros indutivos numa categoria $\mathcal{C}$. Se $J$ é co-filtrante e $(E, (f_i)_{i \in I})$, $(F, (f_j)_{j \in J})$ são limites indutivos então $E \simeq F$.*

Na categoria dos grupos abelianos o limite indutivo existe sempre. No caso dos pré-feixes o conjunto I será $\mathcal{O}_x(\mathrm{X})$, o qual denota o conjunto dos abertos de X que contém x, a relação $\leq$ será a relação $\supset$ de conjuntos. Se E é um pré-feixe de grupos abelianos o limite indutivo em $x$, i.e. para o conjunto I atrás definido, será denotado por $(\mathrm{E}_x, (\lambda_\mathrm{U}))_{\mathrm{U}\in\mathcal{O}_x(\mathrm{U})}$. Para abreviar chamaremos a $\mathrm{E}_x$ o limite indutivo de E em $x$. A $\mathrm{E}_x$ chamamos a **fibra** de E em $x$. Dado $s \in \mathrm{F}(\mathrm{U})$ e $x \in \mathrm{U}$ notamos $s_x$ e chamamos **germe** de $s$ em $x$ à imagem de $s$ em $\mathrm{F}_x$.

**Proposição 2.2.7** *Dado um pré-feixe* F *sobre* X *e* $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$

$$\mathrm{F}_x \simeq \bigsqcup_{\mathrm{U}\in\mathcal{O}_x(\mathrm{X})} \mathrm{F}(\mathrm{U}) \Big/ \mathrm{R}$$

*onde* R *é a relação de equivalência: -dados* $s \in \mathrm{F}(\mathrm{U})$, $t \in \mathrm{F}(\mathrm{V})$ *com* $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathcal{O}_x(\mathrm{X})$ $s\mathrm{R}t$ *se e só se* $\exists \mathrm{W} \subset \mathrm{U} \cap \mathrm{V}$, $\mathrm{W} \in \mathcal{O}_x(\mathrm{X})$ *tal que* $s|_\mathrm{W} = t|_\mathrm{W}$. $[s]_x$ *denotará a classe de equivalência de* $s$.

**Demonstração :** Vamos mostrar que o par $\left(\mathrm{F}_x, (\pi_\mathrm{U})_{\mathrm{U}\in\mathcal{O}_x(\mathrm{X})}\right)$, onde

$$\begin{array}{rcl} \pi_\mathrm{U} : \mathrm{F}(\mathrm{U}) & \longrightarrow & \mathrm{F}_x \\ s & \longmapsto & [s] \end{array}$$

é o limite indutivo do pré-feixe F.
(i) Devido à forma como foi definida a relação de equivalência temos imediatamente a comutatividade do diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bigsqcup_{\mathrm{U}\in\mathcal{O}_x(\mathrm{X})} \mathrm{F}(\mathrm{U}) \Big/ \mathrm{R} & \\
\mathrm{F}(\mathrm{U}) \arrow[u, "\pi_\mathrm{U}"] \arrow[r, "\rho_{\mathrm{V},\mathrm{U}}"'] & \mathrm{F}(\mathrm{V}) \arrow[ul, "\pi_\mathrm{V}"']
\end{tikzcd}$$

pois para qualquer $s \in \mathrm{F}(\mathrm{U})$, $\quad \pi_\mathrm{V} \circ \rho_{\mathrm{V},\mathrm{U}}(s) = \pi_\mathrm{V}(s|_\mathrm{V}) = [s] = \pi_\mathrm{U}(s)$.
(ii) Seja $\left(\mathrm{S}, (\sigma_\mathrm{U})_{\mathrm{U}\in\mathcal{O}_x(\mathrm{X})}\right)$ tal que para qualquer $\mathrm{U} \in \mathcal{O}_x(\mathrm{X})$ o diagrama seguinte é comutativo.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{S} & \\ \mathrm{F}(\mathrm{U}) \arrow[u, "\pi_{\mathrm{U}}"] \arrow[r, "\rho_{\mathrm{V,U}}"'] & \mathrm{F}(\mathrm{V}) \arrow[ul, "\pi_{\mathrm{V}}"'] \end{tikzcd}$$

Consideremos então o diagrama

$$\begin{tikzcd} \bigsqcup_{\mathrm{U}\in\mathcal{O}_x(\mathrm{X})} \mathrm{F}(\mathrm{U}) \Big/ \mathrm{R} \arrow[dr, "h"] & \\ \mathrm{F}(\mathrm{U}) \arrow[u, "\pi_{\mathrm{U}}"] \arrow[r, "\sigma_{\mathrm{U}}"'] & \mathrm{S} \end{tikzcd}$$

onde $h$ é a aplicação definida por:

$$\begin{array}{rccl} h\colon & \bigsqcup\limits_{\mathrm{U}\in\mathcal{O}_x(\mathrm{X})} \mathrm{F}(\mathrm{U}) \Big/ \mathrm{R} & \longrightarrow & \mathrm{S} \\ & [t]_x & \longmapsto & \sigma_{\mathrm{U}}(t) \end{array}$$

onde $t \in \mathrm{F}(\mathrm{U})$ para um certo U. A aplicação $h$ está bem definida pois se $[s]_x = [t]_x$, i.e. $s\mathrm{R}t$ onde $s \in \mathrm{F}(\mathrm{U})\,,\ t \in \mathrm{F}(\mathrm{V})\,,\ \mathrm{U},\mathrm{V} \in \mathcal{O}_x(\mathrm{X})$ então existe $\mathrm{W} \subset \mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ tal que $\mathrm{W} \in \mathcal{O}_x(\mathrm{X})$ e $s|_{\mathrm{W}} = t|_{\mathrm{W}}$, logo $\sigma_{\mathrm{U}}(s) = \sigma_{\mathrm{W}}(\rho_{\mathrm{W,U}}(s)) = (\rho_{\mathrm{W,V}}(s)) = \sigma_{\mathrm{V}}(t)\,.$

Mostremos agora que $h$ é o único morfismo que torna o diagrama anterior comutativo. Seja $\eta\colon \bigsqcup_{\mathrm{U}\in\mathcal{O}_x(\mathrm{X})} \mathrm{F}(\mathrm{U}) \Big/ \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{S}$ outro morfismo que torne o diagrama anterior comutativo. Para qualquer $[t]_x \in \bigsqcup_{\mathrm{U}\in\mathcal{O}_x(\mathrm{X})} \mathrm{F}(\mathrm{U}) \Big/ \mathrm{R}$, onde $t \in \mathrm{F}(\mathrm{U})$ para um certo $\mathrm{U} \in \mathcal{O}_x(\mathrm{X})\,,$ temos que $\eta([t]_x) = \sigma_{\mathrm{U}}(t) = h([t]_x)\,,$ logo $\eta = h$. $\square$

**Proposição 2.2.8** *Dados* $\mathrm{F}, \mathrm{G}$ *pré-feixes de grupos abelianos sobre* $X$ *e* $f : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *um morfismo de pré-feixes, então, para qualquer* $x \in \mathrm{X}$, *existe um e um só morfismo*

$$f_x \overset{\mathrm{def}}{=} \varinjlim_{\mathrm{U}\in\mathcal{O}_x(\mathrm{X})} f(\mathrm{U})$$

*tal que para qualquer* $\mathrm{U} \in \mathcal{O}_x(\mathrm{X})$ *o diagrama seguinte é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F}(\mathrm{U}) \arrow[r, "f(\mathrm{U})"] \arrow[d, "\lambda_{\mathrm{U}}^{\mathrm{F}}"'] & \mathrm{G}(\mathrm{U}) \arrow[d, "\lambda_{\mathrm{U}}^{\mathrm{G}}"] \\
\mathrm{F}_x \arrow[r, "f_x"'] & \mathrm{G}_x
\end{tikzcd}$$

**Demonstração:** É uma consequência imediata da comutatividade do seguinte diagrama e de $\mathrm{F}_x$ ser limite indutivo.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F}_x \arrow[rr, dotted, "f_x"] & & \mathrm{G}_x \\
& \mathrm{F}(\mathrm{U}) \arrow[ul, "\lambda_{\mathrm{U}}^{\mathrm{F}}"] \arrow[ur, "\lambda_{\mathrm{U}}^{\mathrm{G}} \circ f(\mathrm{U})"'] \arrow[d, "\rho_{\mathrm{V},\mathrm{U}}"] & \\
& \mathrm{F}(\mathrm{V}) \arrow[uul, "\lambda_{\mathrm{V}}^{\mathrm{F}}"] \arrow[uur, "\lambda_{\mathrm{V}}^{\mathrm{G}} \circ f(\mathrm{V})"'] &
\end{tikzcd}$$

onde $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathcal{O}_x(\mathrm{X})$ e $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$. □

**Corolário 2.2.9** *Dado* $x \in \mathrm{X}$ *o limite indutivo* $\varinjlim_{\mathrm{U} \in \mathcal{O}_x(\mathrm{X})} : \text{pré} - \mathcal{S}h^{\mathcal{C}}(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathcal{C}$ *é um functor.*

## 2.3 Feixes

Vamos chamar cobertura aberta de um aberto U de X a uma família de abertos $(\mathrm{U}_i)_{i \in I}$ de X tal que $\mathrm{U} = \bigcup_{i \in I} \mathrm{U}_i$.

**Definição 2.3.1** *Seja* X *um espaço topológico. Um pré-feixe de grupos abelianos* F *sobre* X *diz-se um* ***feixe*** *se verificar as condições* $\mathrm{S}_1$ *e* $\mathrm{S}_2$ *abaixo discriminadas*

$(\mathrm{S}_1)$ *Seja* U *um aberto de* X *e* $(\mathrm{U}_i)_{i \in I}$ *uma cobertura aberta de* U. *Seja* $s$ *uma seção de* F *sobre* U. *Se* $s|_{\mathrm{U}_i} = 0$ *para qualquer* $i \in I$, *então* $s = 0$.

($\mathrm{S}_2$) *Seja* U *um aberto de* X *e* $(\mathrm{U}_i)_{i\in I}$ *uma cobertura aberta de* U. *Seja* $s_i \in \mathrm{F}(\mathrm{U}_i)$, $i \in I$, *uma família de secções de* F. *Se* $s_i|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j} = s_j|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j}$, *então existe* $s \in \mathrm{F}(\mathrm{U})$ *tal que* $s|_{\mathrm{U}_i} = s_i$, *para qualquer* $i \in I$.

Vamos denotar por $\mathcal{S}h(\mathrm{X})$ a subcategoria plena da categoria dos pré--feixes sobre X, de grupos abelianos, cujos os objectos são feixes.

**Exemplos 2.3.2** (i) Dado X um espaço topológico e A um anel (G um grupo abeliano), o pré-feixe das funções localmente constantes $\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}}$ $(\underline{\mathrm{G}}_{\mathrm{X}})$ é um feixe.

(ii) Dada uma variedade analítica complexa X, o pré-feixe das funções holomorfas $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ é um feixe.

(iii) Dada uma superfície de Riemann X e $\Sigma \subset \mathrm{X}$ um subconjunto discreto, o pré-feixe das funções meromorfas com polos ao longo de $\Sigma$, $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(*\Sigma)(\mathrm{X})$, é um feixe.

**Lema 2.3.3** *Seja* F *um pré-feixe sobre* X *que verifica* $(\mathrm{S}_1)$. *Dada uma secção* $s \in \mathrm{F}(\mathrm{U})$, U, *aberto de* X *tal que* $s_x = 0$ *para qualquer* $x \in \mathrm{U}$, *então* $s = 0$.

**Demonstração:** Comecemos por observar que $0 \in \mathrm{F}(\mathrm{U})$ e que para qualquer $x \in \mathrm{U}$ $[s]_x = [0]_x$, logo existe $\mathrm{V}_x \in \mathcal{O}_x(\mathrm{X})$ tal que $\mathrm{V}_x \subset \mathrm{U}$ e $s|_{\mathrm{V}_x} = 0|_{\mathrm{V}_x} = 0$. Pela propriedade $(\mathrm{S}_1)$ temos então que $s = 0$. □

**Proposição 2.3.4** *Seja* $f\colon \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *um morfismo de feixes sobre* X. *O morfismo* $f$ *é um isomorfismo, se e só se* $f_x\colon \mathrm{F}_x \to \mathrm{G}_x$ *é um isomorfismo para qualquer* $x \in \mathrm{X}$.

**Demonstração:** A necessidade é uma consequência do Corolário 2.2.9.

Suponhamos que $f_x$ é um monomorfismo para qualquer $x \in \mathrm{X}$. Vejamos que $f(\mathrm{U})\colon \mathrm{F}(\mathrm{U}) \to \mathrm{G}(\mathrm{U})$ é um monomorfismo. Seja $s \in \mathrm{F}(\mathrm{U})$ tal que $f(s) = 0$, logo para qualquer $x \in \mathrm{X}$ $(f(s))_x = 0$. Devido à comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F}(\mathrm{U}) \arrow[r, "f(\mathrm{U})"] \arrow[d, "\lambda^{\mathrm{F}}_{\mathrm{U}}"'] & \mathrm{G}(\mathrm{U}) \arrow[d, "\lambda^{\mathrm{G}}_{\mathrm{U}}"] \\ \mathrm{F}_x \arrow[r, "f_x"'] & \mathrm{G}_x \end{tikzcd}$$

temos que $(f(s))_x = f_x(s_x) = 0$. Como $f_x$ é um monomorfismo $s_x = 0$ para qualquer $x \in \mathrm{U}$, consequentemente pelo Lema 2.3.3 $s = 0$.

Suponhamos que $f_x$ é um epimorfismo para qualquer $x \in \mathrm{X}$. Tomemos $t \in \mathrm{G}(\mathrm{U})$. Como $f_x$ é um epimorfismo então existe $[\sigma(x)]_x \in \mathrm{F}_x$ tal que $f_x([\sigma(x)]_x) = t_x$ onde $\sigma(x) \in \mathrm{F}(\mathrm{V}_x)$, $\mathrm{V}_x \in \mathcal{O}_x(\mathrm{X})$ e $\mathrm{V}_x \subset \mathrm{U}$. Dado que $[t]_x = [f(\sigma(x))]_x$, pela comutatividade do diagrama anterior existe $\mathrm{W}_x \subset \mathrm{V}_x \cap \mathrm{U}$ tal que $t|_{\mathrm{W}_x} = f(\sigma(x)|_{\mathrm{W}_x})$. Consequentemente para quaisquer $x, y \in \mathrm{U}$ $f\left(\sigma(x)|_{\mathrm{W}_x \cap \mathrm{W}_y}\right) = f\left(\sigma(y)|_{\mathrm{W}_x \cap \mathrm{W}_y}\right)$. Pela injectividade de $f(\mathrm{W}_x \cap \mathrm{W}_y)$ temos que $\sigma(x)|_{\mathrm{W}_x \cap \mathrm{W}_y} = \sigma(y)|_{\mathrm{W}_x \cap \mathrm{W}_y}$. Como F é um feixe, existe $s \in \mathrm{F}(\mathrm{U})$ tal que $s|_{\mathrm{V}_x} = \sigma(x)$ para qualquer $x \in \mathrm{U}$. Dado que $(f(s) - t)|_{\mathrm{W}_x} = f(\sigma(x)|_{\mathrm{W}_x}) - t|_{\mathrm{W}_x} = 0$, então $f(s) = t$. Logo $f$ é um isomorfismo. $\square$

**Definição 2.3.5** *Dado* $\mathrm{F} \in \text{pré}-\mathcal{S}h(\mathrm{X})$, *seja* $\tilde{\mathrm{F}}$ *o pré-feixe sobre* X *definido do seguinte modo:*

$$\tilde{\mathrm{F}}(\mathrm{U}) = \prod_{z \in \mathrm{U}} \mathrm{F}_z,$$

*se* $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$, *o morfismo de restrição é dado por*

$$\begin{array}{rcl} \rho_{\mathrm{V},\mathrm{U}} \colon \tilde{\mathrm{F}}(\mathrm{U}) & \longrightarrow & \tilde{\mathrm{F}}(\mathrm{V}). \\ (s(x))_{x \in \mathrm{U}} & \longmapsto & (s(x))_{x \in \mathrm{V}} \end{array}$$

**Lema 2.3.6** $\tilde{\mathrm{F}}$ *é um feixe.*

**Proposição 2.3.7** *Sejam* $\mathrm{F}, \mathrm{G}$ *feixes sobre* X *e* $f, g \colon \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *morfismos de feixes tais que* $f_x = g_x$ *para qualquer* $x \in \mathrm{X}$, *então* $f = g$.

**Demonstração:** Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F}(\mathrm{U}) \arrow[r, hook, "\eta_{\mathrm{F}}(\mathrm{U})"] \arrow[d, "f_{\mathrm{U}}"'] & \tilde{\mathrm{F}}(\mathrm{U}) \arrow[d, "\prod_{x \in \mathrm{U}} f_x"] \\ \mathrm{G}(\mathrm{U}) \arrow[r, hook, "\eta_{\mathrm{G}}(\mathrm{U})"'] & \tilde{\mathrm{G}}(\mathrm{U}) \end{tikzcd}$$

pelo Lema 2.3.3 temos que $\eta_{\mathrm{F}}, \eta_{\mathrm{G}}$ são injectivas. Como $f_x = g_x$ para qualquer $x \in \mathrm{U}$ o diagrama permanece comutativo se substituirmos $f_{\mathrm{U}}$ por $g_{\mathrm{U}}$, logo $\eta_{\mathrm{G}}(\mathrm{U}) \circ f_{\mathrm{U}} = \eta_{\mathrm{G}}(\mathrm{U}) \circ g_{\mathrm{U}}$, pelo que $f_{\mathrm{U}} = g_{\mathrm{U}}$ pois $\eta_{\mathrm{G}}(\mathrm{U})$ é injectiva. $\square$

**Definição 2.3.8 (Feixe associado a um pré-feixe )** *Podemos associar a qualquer pré-feixe* $\mathrm{F}$ *sobre* $\mathrm{X}$ *um feixe* $\mathrm{F}^+$ *sobre* $\mathrm{X}$ *e um morfismo de pré-feixes* $\theta_{\mathrm{F}} \colon \mathrm{F} \to \mathrm{F}^+$ *do seguinte modo: -dado* $\mathrm{U}$ *aberto de* $\mathrm{X}$, $\mathrm{F}^+$ *é o sub-pré-feixe do feixe* $\tilde{\mathrm{F}}$ *formado pelas secções* $(s(x))_{x\in \mathrm{U}}$ *tais que*

$$\forall x_0 \in \mathrm{U},\ \exists \mathrm{V} \in \mathcal{O}_{x_0}(\mathrm{U}),\ \exists t \in \mathrm{F}(\mathrm{V}) \quad \textit{tal que} \ \ t_x = s(x) \ \ \forall x \in \mathrm{V}.$$

*Dado* $\mathrm{U}$ *aberto de* $\mathrm{X}$ *definimos* $\theta_{\mathrm{F}}$ *da seguinte forma*

$$\begin{array}{rcl} \theta_{\mathrm{F}}(\mathrm{U}) : \mathrm{F}(\mathrm{U}) & \longrightarrow & \mathrm{F}^+(\mathrm{U}). \\ s & \longmapsto & (s_x)_{x\in \mathrm{U}} \end{array}$$

**Lema 2.3.9** $\mathrm{F}^+$ *é feixe.*

**Demonstração:** Seja $\mathrm{U}$ aberto de $\mathrm{X}$ e $(\mathrm{U}_i)_{i\in I}$ uma cobertura aberta de $\mathrm{U}$. $(\mathrm{S}_1)$ Seja $(s(x))_{x\in \mathrm{U}} \in \mathrm{F}^+(\mathrm{U})$ tal que $(s(x))_{x\in \mathrm{U}}\big|_{\mathrm{U}_i} = 0$ então $s(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathrm{U}_i$, logo $s(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathrm{U}$, i.e. $(s(x))_{x\in \mathrm{U}} = 0$.

$(\mathrm{S}_2)$ Sejam $(s_i(x))_{x\in \mathrm{U}_i} \in \mathrm{F}^+(\mathrm{U}_i)$ tais que

$$\forall i, j \in I \ \ (s_i(x))_{x\in \mathrm{U}_i}\Big|_{\mathrm{U}_i\cap \mathrm{U}_j} = (s_j(x))_{x\in \mathrm{U}_i}\Big|_{\mathrm{U}_i\cap \mathrm{U}_j}$$

então $s_i(x) = s_j(x)\ \forall x \in \mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_j$. Como $\tilde{\mathrm{F}}$ é um feixe então existe um e um só $(s(x))_{x\in \mathrm{U}} \in \tilde{\mathrm{F}}(\mathrm{U})$ tal que $(s(x))_{x\in \mathrm{U}}\big|_{\mathrm{U}_i} = (s_i(x))_{x\in \mathrm{U}_i}$. Seja $x_0 \in \mathrm{U}_i$, por definição de $\mathrm{F}^+(\mathrm{U}_i)$ temos que existe $\mathrm{V} \in \mathcal{O}_{x_0}(\mathrm{U}_i)$ e existe $t \in \mathrm{F}(\mathrm{V}_i)$ tal que $t_x = s_i(x)$ para qualquer $x \in \mathrm{V}$, logo $(s(x))_{x\in \mathrm{U}} \in \mathrm{F}^+(\mathrm{U})$. □

**Proposição 2.3.10** *Seja* $\mathrm{F} \in \text{pré} - \mathcal{S}h(\mathrm{X})$.

*(i) O morfismo canónico* $\theta_{\mathrm{F}}$ *induz um isomorfismo em todas as fibras.*

*(ii) Dado um morfismo de pré-feixes* $u \colon \mathrm{F} \to \mathrm{G}$, *se* $\mathrm{G}$ *é um feixe então existe um e um só morfismo* $u^+ \colon \mathrm{F}^+ \to \mathrm{G}$ *tal que o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F}^+ \arrow[dr, "u^+"] & \\ \mathrm{F} \arrow[u, "\theta_{\mathrm{F}}"] \arrow[r, "u"'] & \mathrm{G} \end{tikzcd} \qquad (*)$$

*Esta propriedade caracteriza o feixe* $\mathrm{F}^+$ *a menos de isomorfismo. Em particular, resulta de (i) que se* $\mathrm{F}$ *é um feixe então temos um isomorfismo* $\mathrm{F} \tilde{\to} \mathrm{F}^+$.

*(iii) Dado um morfismo de pré-feixes* $u\colon \mathrm{F} \to \mathrm{G}$, *existe um e um só morfismo* $u^{+}\colon \mathrm{F}^{+} \to \mathrm{G}^{+}$ *tal que o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F}^{+} \arrow[r, "u^{+}"] & \mathrm{G}^{+} \\ \mathrm{F} \arrow[u, "\theta_{\mathrm{F}}"] \arrow[r, "u"'] & \mathrm{F} \arrow[u, "\theta_{\mathrm{G}}"'] \end{tikzcd} \qquad (**)$$

**Demonstração:**

(i) Dado $x \in \mathrm{X}$ e $\mathrm{U} \in \mathcal{O}_x(\mathrm{X})$, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F}(\mathrm{U}) \arrow[r, "\theta_{\mathrm{F}}(\mathrm{U})"] \arrow[dr, "\lambda^{\mathrm{F}}(\mathrm{U})"'] & \mathrm{F}^{+}(\mathrm{U}) \arrow[d, "\lambda^{\mathrm{F}^{+}}(\mathrm{U})"] \\ & \mathrm{F}_x \end{tikzcd}$$

Tomando o limite indutivo do diagrama anterior temos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F}_x \arrow[r, "\theta_{\mathrm{F},x}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathrm{F}_x}"'] & \mathrm{F}^{+}_x(\mathrm{U}) \arrow[d] \\ & \mathrm{F}_x \end{tikzcd}$$

Conclui-se daqui a injectividade de $\theta_{\mathrm{F},x}$. Seja $x_0 \in \mathrm{X}$, $s(x_0) \in \mathrm{F}^{+}_{x_0}$, como $\mathrm{F}^{+}$ é feixe então existe $\mathrm{U} \in \mathcal{O}_{x_0}(\mathrm{X})$, $(s(x))_{x\in\mathrm{U}} \in \mathrm{F}^{+}(\mathrm{U})$ tal que $\left((s(x))_{x\in\mathrm{U}}\right)_{x_0} = s(x_0)$. Por definição de $\mathrm{F}^{+}(\mathrm{U})$ existe $\mathrm{V} \in \mathcal{O}_{x_0}(\mathrm{U})$ tal que $\sigma(x) = t_x$ para qualquer $x \in \mathrm{V}$, em particular devido à comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F}(\mathrm{V}) \arrow[r, "\theta_{\mathrm{F}}(\mathrm{V})"] \arrow[d, "\lambda^{\mathrm{F}}(\mathrm{V})"'] & \mathrm{F}^{+}(\mathrm{V}) \arrow[d, "\lambda^{\mathrm{F}^{+}}(\mathrm{V})"] \\ \mathrm{F}_{x_0} \arrow[r, "\theta_{\mathrm{F},x_0}"'] & \mathrm{F}^{+}_{x_0} \end{tikzcd}$$

temos que $\theta_{\mathrm{F},x_0}$ é sobrejectiva.

(iii) Definamos $u^+\left((s(x))_{x\in \mathrm{U}}\right) = (u_x(s(x)))_{x\in\mathrm{U}}$. Vejamos que $u^+$ está bem definido. Seja $x_0 \in \mathrm{U}$, por definição de $\mathrm{F}^+$

$$\exists \mathrm{V} \in \mathcal{O}_{x_0}(\mathrm{U}),\ \exists t \in \mathrm{F}(\mathrm{V}) \text{ tal que } t_x = s(x)\ \forall x \in \mathrm{V}$$

logo para qualquer $x \in \mathrm{V}$ $(u_x(s(x)))_{x\in\mathrm{V}} = (u_x(t_x))_{x\in\mathrm{V}} = (u(t))_{x\in\mathrm{V}}$, consequentemente $(u_x(s(x)))_{x\in\mathrm{U}} \in \mathrm{G}^+(\mathrm{U})$, logo o diagrama $(*)$ é comutativo.

Mostremos a unicidade. Sejam $v, w : \mathrm{F}^+ \to \mathrm{G}^+$ morfismos para os quais o diagrama $(**)$ comutativo. Tomando o limite indutivo temos que $\theta_{\mathrm{G},x} \circ u_x = v_x \circ \theta_{\mathrm{F},x} = w_x \circ \theta_{\mathrm{F},x}$ como por (i) $\theta_{\mathrm{F},x}$ é um isomorfismo então para qualquer $x \in \mathrm{X}$ $v_x = w_x$, logo pela Proposição 2.3.7 $v = w$.

(ii) Se G é um feixe por aplicação de (i) e da Proposição 2.3.4 temos que $\theta_{\mathrm{G}}$ é um isomorfismo. Se $v, w : \mathrm{F}^+ \to \mathrm{G}$ são morfismos para os quais o diagrama $(*)$ é comutativo então $\theta_{\mathrm{G}} \circ v,\ \theta_{\mathrm{G}} \circ w \colon \mathrm{G}^+ \to \mathrm{G}^+$ são morfismos para os quais o diagrama $(**)$ é comutativo, logo $\theta_{\mathrm{G}} \circ v = \theta_{\mathrm{G}} \circ w$, consequentemente $v = w$ pois $\theta_{\mathrm{G}}$ é isomorfismo. □

**Definição 2.3.11** *Seja $\mathcal{A}$ um pré-feixe de anéis. Temos um functor esquecimento ab para a categoria dos pré-feixes de grupos abelianos. Dizemos que $\mathcal{A}$ é um anel, ou um feixe de anéis, se o pré-feixe ab$(\mathcal{A})$ é um feixe de grupos abelianos.*

*Seja $\mathcal{A}$ um anel sobre* X *e $\mathcal{L}$ um feixe de grupos abelianos sobre* X. *Dá-se uma estrutura de $\mathcal{A}$ − módulo a $\mathcal{L}$ dando para cada aberto* U *de* X *uma estrutura de $\mathcal{A}(\mathrm{U})$ − módulo a $\mathcal{L}(\mathrm{U})$ de tal forma que se $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$, $a \in \mathcal{A}(\mathrm{U})$ e $m \in \mathcal{L}(\mathrm{U})$ então*

$$(am)\,|_{\mathrm{V}} = a|_{\mathrm{V}}.m|_{\mathrm{V}}.$$

Chama-se $\mathcal{A}$ − **módulo** a um feixe de grupos abelianos $\mathcal{L}$ munido de uma estrutura de $\mathcal{A}$ − módulo. O anel $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{A}$ − módulo esquerdo e direito.

Um $\mathcal{A}$ − módulo $\mathcal{L}$ diz-se **livre** se é isomorfo a uma soma directa finita de cópias de $\mathcal{A}$. Um $\mathcal{A}$ − módulo diz-se **localmente livre** se existe uma cobertura aberta $(\mathrm{U}_i)_{i\in I}$ de X tal que $\mathcal{L}|_{\mathrm{U}_i}$ é um $\mathcal{A}|_{\mathrm{U}_i}$ − módulo livre para qualquer $i \in I$.

**Definição 2.3.12** *Seja* X *um espaço topológico e $\mathcal{A}$ um anel sobre* X. *Sejam $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ $\mathcal{A}$ -módulos. Definimos o pré-feixe*

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$$

*da seguinte forma*

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})(\mathrm{U}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{A}|_{\mathrm{U}}}(\mathcal{M}|_{\mathrm{U}}, \mathcal{N}|_{\mathrm{U}}),$$

*onde* U *é um aberto de* X.

**Proposição 2.3.13** *O pré-feixe* $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ *é um feixe e um* $\mathcal{A}$ *-módulo.*

**Demonstração:**
• $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ verifica $(S_1)$:
Sejam $u \in \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{M},\mathcal{N})(\mathrm{U}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{A}|_{\mathrm{U}}}(\mathcal{M}|_{\mathrm{U}},\mathcal{N}|_{\mathrm{U}})$ e uma cobertura aberta $(\mathrm{U}_i)$ de U, suponhamos que $u|_{\mathrm{U}_i} = 0$, para todo o $i$. Então dado V aberto de U e $s \in \mathcal{M}(\mathrm{V})$, temos que $u(s)|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{V}} = u(s|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{V}}) = 0$ $\forall i$, logo pelo Lema 2.3.3 $u(s) = 0$. Como tal, $u = 0$.

• $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ verifica $(S_2)$:
Fixemos agora uma família de morfismos

$$u_i \in \mathcal{H}om_{\mathcal{A}|_{\mathrm{U}_i}}(\mathcal{M}|_{\mathrm{U}_i},\mathcal{N}|_{\mathrm{U}_i})$$

tal que se $\mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_j \neq \varnothing$ então $u_i|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j} = u_j|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j}$. De seguida vamos definir $u \in \mathcal{H}om_{\mathcal{A}|_{\mathrm{U}}}(\mathcal{M}|_{\mathrm{U}},\mathcal{N}|_{\mathrm{U}})$ de tal forma que $u|_{\mathrm{U}_i} = u_i$, para todo o $i$.

Dados V aberto de U e $s \in \mathcal{M}(\mathrm{V})$

$$u_i(s|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{V}})|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j\cap\mathrm{V}} = u_j(s|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{V}})|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j\cap\mathrm{V}}.$$

Como tal as secções $u_i(s|_{\mathrm{U}_i})$ colam-se numa secção $u(s)$ tal que $u(s)|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{V}} = u_i(s|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{V}})$. Fica assim definido um morfismo $u$ tal que $u|_{\mathrm{U}_i} = u_i$.

• $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ é um $\mathcal{A}$ -módulo:
dados $u \in \mathcal{H}om_{\mathcal{A}|_{\mathrm{U}}}(\mathcal{M}|_{\mathrm{U}},\mathcal{N}|_{\mathrm{U}})$ e $a \in \mathcal{A}(\mathrm{U})$ a correspondência $s \mapsto au(s)$ define um morfismo $\mathcal{A}|_{\mathrm{U}}$ -linear $au$ de $\mathcal{M}|_{\mathrm{U}}$ para $\mathcal{N}|_{\mathrm{U}}$, além disso

$$(au)|_{\mathrm{V}} = (a|_{\mathrm{V}})(u|_{\mathrm{V}}),$$

para todo o V contido em U. □

**Definição 2.3.14** *Chama-se **dual** de um* $\mathcal{A}$ *-módulo* $\mathcal{M}$ *ao* $\mathcal{A}$ *-módulo* $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{M},\mathcal{A})$, *e denotamo-lo da seguinte forma:*

$$\mathcal{M}^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{M},\mathcal{A}).$$

**Definição 2.3.15** *Dados* $\mathcal{A}$ *–* *módulos* $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ *chamamos* $\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{G}$ *ao feixe associado ao pré-feixe*

$$\mathrm{U} \text{ aberto de } \mathrm{X} \longmapsto \mathcal{F}(\mathrm{U}) \otimes_{\mathcal{A}(\mathrm{U})} \mathcal{G}(\mathrm{U}).$$

Este feixe é um $\mathcal{A}$ – módulo.

Seja G um grupo abeliano e X um espaço topológico. Ao feixe $\underline{\mathrm{G}}_{\mathrm{X}}$ vamos chamar feixe **constante** de fibra G.

Seja A um anel e $\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}}$ o feixe constante de fibra A. Chama-se $\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}}$ – módulo localmente constante ou feixe constante de fibra A a um $\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}}$ – módulo localmente livre. Vamos chamar **sistema local** a um $\underline{\mathbb{C}}_{\mathrm{X}}$ – módulo localmente livre.

**Definição 2.3.16** *Seja* $\mathcal{L}$ *um* $\underline{\mathrm{A}}$ *-módulo sobre* X. $\mathcal{L}$ *diz-se um* $\underline{\mathrm{A}}$ *-módulo* ***constante*** *se existir* $d \in \mathbb{N}_0$ *tal que* $\mathcal{L} \simeq (\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}})^d$.

**Lema 2.3.17** *Se* X *é um espaço topológico conexo e localmente conexo então são equivalentes as afirmações*
*(i)* $\mathcal{E}$ *é um* $\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}}$ – módulo *constante.*
*(ii)* $\mathcal{E}$ *é um feixe tal que as suas fibras são* A – módulos *livres de dimensão finita e tal que dados* $\mathrm{U}, \mathrm{V}$ *abertos conexos de* X, $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$, *então o morfismo de restrição* $\mathcal{E}(\mathrm{U}) \to \mathcal{E}(\mathrm{V})$ *é um isomorfismo.*
*(iii)* $\mathcal{E}$ *é um feixe tal que as suas fibras são* A – módulos *livres de dimensão finita e tal que para qualquer aberto conexo* U *de* X, $x \in \mathrm{X}$, *o morfismo canónico* $\mathcal{E}(\mathrm{U}) \to \mathcal{E}_x$ *é um isomorfismo.*

**Demonstração:**
(i) $\Rightarrow$ (ii) Como $\mathcal{E}$ é constante $\mathcal{E} \simeq \underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}}^d$, logo as fibras são A -módulos livres de dimensão finita. Seja $\varphi\colon \mathcal{E} \to (\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}})^d$ um isomorfismo. Dado que $\rho_{\mathrm{VU}}^{(\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}})^d}$ é um isomorfismo temos que $\rho_{\mathrm{VU}}^{\mathcal{E}} = \varphi_{\mathrm{V}}^{-1} \circ \rho_{\mathrm{VU}}^{(\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}})^d} \circ \varphi_{\mathrm{U}}$ é um isomorfismo.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) É imediato que fibras são A -módulos livres de dimensão finita. Seja U um aberto conexo não vazio de X, seja $\mathcal{G}$ o seguinte pré-feixe em U:

$$\mathcal{G}(\mathrm{W}) = \begin{cases} \mathcal{E}(\mathrm{W}) & \Leftarrow \quad \mathrm{W} \neq \varnothing \\ 0 & \Leftarrow \quad \mathrm{W} = \varnothing \end{cases}$$

onde W é um aberto de U. Seja $\phi$ o seguinte morfismo de pré-feixes:

$$\begin{array}{rcl} \phi_{\mathrm{V}}\colon \mathcal{E}|_{\mathrm{U}}(\mathrm{V}) & \longrightarrow & \mathcal{G}(\mathrm{V}) \\ s & \longmapsto & \rho_{\mathrm{VU}}(s) \end{array}$$

dado que $\phi_{\mathrm{V}}$ é um isomorfismo para qualquer aberto conexo, pela Proposição 2.3.4 temos que o limite indutivo na família de abertos conexos que contém $x$ é um isomorfismo. Por aplicação da Proposição 2.2.6 temos que $\rho_x\colon \mathcal{E}(\mathrm{U}) \to \mathcal{E}_x$ é um isomorfismo.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Seja $x \in \mathrm{X}$, dado que as fibras são A -módulos livres de dimensão finita $\psi_x \colon \mathcal{E}_x \to \mathrm{A}^d$ um isomorfismo. Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(\mathrm{U}) \arrow[r, "\chi_{\mathrm{U}}"] \arrow[d, "\rho_x^{\mathcal{E}}"', "\wr"] & (\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}})^d(\mathrm{U}) \arrow[d, "\rho_x^{(\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}})^d}", "\wr"'] \\
\mathcal{E}_x \arrow[r, "\sim", "\psi_x"'] & \mathrm{A}^d
\end{tikzcd}$$

existe um e um só morfismo$\chi_{\mathrm{U}}$ que torna o diagrama anterior comutativo e este é um isomorfismo. Seja W um aberto de X e $(\mathrm{W}_i)_{i\in I}$ a decomposição de W em abertos conexos, temos então definido o seguinte morfismo de pré-feixes

$$\begin{array}{rccc}
\chi_{\mathrm{W}} \colon & \mathcal{E}(\mathrm{W}) & \longrightarrow & (\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}})^d(\mathrm{W}) \\
& s & \longmapsto & \sigma
\end{array}$$

onde $\sigma$ é a colagem da família de secções $(\chi_{\mathrm{W}_i}(s|_{\mathrm{W}_i}))_{i\in I}$.
dado que os $\phi_x$ são os limites indutivos e estes são isomorfismos pela Proposição 2.3.4 $\chi$ é um isomorfismo de feixes, logo $\mathcal{E}$ é um feixe constante. $\square$

## 2.4 Imagens de um feixe por uma aplicação contínua.

### 2.4.1 O feixe imagem inversa

Seja $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ uma aplicação contínua. Dado um feixe G sobre Y, vamos associar-lhe um feixe $f^{\circ}\mathrm{G}$ sobre X do seguinte modo

$$f^{\circ}\mathrm{G}\,(\mathrm{U}) = \prod_{x\in \mathrm{U}} \mathrm{G}_{f(x)};$$

se U, V são abertos de X tais que $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ o morfismo de restrição é dado por

$$\begin{array}{rccc}
\rho_{\mathrm{V,U}} \colon & f^{\circ}\mathrm{G}\,(\mathrm{U}) & \longrightarrow & f^{\circ}\mathrm{G}\,(\mathrm{V})\,. \\
& (s\,(x))_{x\in \mathrm{U}} & \longmapsto & (s\,(x))_{x\in \mathrm{V}}
\end{array}$$

Dados $\mathrm{G}_1$, $\mathrm{G}_2$ feixes sobre Y e $u \colon \mathrm{F}_1 \to \mathrm{G}_2$ morfismo de feixes, $u$ induz um morfismo de feixes

$$\begin{array}{rcl} f^{\circ}u\,(\mathrm{U}) : f^{\circ}\mathrm{G}_1\,(\mathrm{U}) & \longrightarrow & f^{\circ}\mathrm{G}_1\,(\mathrm{V}) \\ (s\,(x))_{x\in \mathrm{U}} & \longmapsto & \left(u_{f(x)}\,(s\,(x))\right)_{x\in \mathrm{V}} \end{array}$$

**Definição 2.4.1 (Feixe imagem inversa)** *O feixe* ***imagem inversa****,* $f^{-1}\mathrm{G}\,(\mathrm{U})$*, é o subfeixe de* $f^{\circ}\mathrm{G}\,(\mathrm{X})$ *dado por*

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}\mathrm{G}\,(\mathrm{U}) & = & \Big\{ (s\,(x))_{x\in \mathrm{U}} \in f^{\circ}\mathrm{G}\,(\mathrm{U}) \,\Big|\, \forall x_0 \in \mathrm{U}\ \exists \mathrm{W} \in \mathcal{O}_{x_0}\,(\mathrm{U}) \\ & & \exists \mathrm{V} \in \mathcal{O}_{f(x_0)}\,(\mathrm{Y}) \quad \exists t \in \mathrm{G}\,(\mathrm{V}) \quad \textit{tal que} \\ & & f\,(\mathrm{W}) \subset \mathrm{V} \;\; \textit{e} \;\; (s\,(x))_{x\in \mathrm{W}} = \left(t_{f(x)}\right)_{x\in \mathrm{W}} \Big\}. \end{array}$$

**Lema 2.4.2** *Sejam* X, Y *espaços topológicos e* $f\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *uma aplicação contínua. Sejam* F, G *feixes sobre* Y *e* $u\colon \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *um morfismo de feixes, então* $f$ *induz um morfismo de feixes,* $f^{-1}u\colon f^{-1}\mathrm{F} \to f^{-1}\mathrm{G}$*, definido da seguinte forma:*

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}u(\mathrm{U})\colon f^{-1}\mathrm{F}(\mathrm{U}) & \longrightarrow & f^{-1}\mathrm{G}(\mathrm{U}) \\ (s(x))_{x\in \mathrm{U}} & \longmapsto & \left(u_{f(x)}\,(s(x))\right)_{x\in \mathrm{U}} \end{array} \tag{2.1}$$

*onde* U *é um aberto de* X.

**Demonstração:** É imediato que $\left(u_{f(x)}\,(s(x))\right)_{x\in \mathrm{U}} \in f^{\circ}\mathrm{G}(\mathrm{U})$, pelo que se $\left(u_{f(x)}\,(s(x))\right)_{x\in \mathrm{U}} \in f^{-1}\mathrm{G}(\mathrm{U})$ então $f^{-1}u$ é morfismo de feixes. Como $(s(x))_{x\in \mathrm{U}} \in f^{\circ}\mathrm{F}(\mathrm{U})$ então para qualquer $x_0 \in \mathrm{U}$

$$\exists \mathrm{W} \in \mathcal{O}_{x_0}\,(\mathrm{U})\ \exists \mathrm{V} \in \mathcal{O}_{f(x_0)}\,(\mathrm{Y}) \quad \exists t \in \mathrm{G}\,(\mathrm{V}) \quad \text{tal que}$$

$$f\,(\mathrm{W}) \subset \mathrm{V} \;\text{ e }\; (s\,(x))_{x\in \mathrm{W}} = \left(t_{f(x)}\right)_{x\in \mathrm{W}}$$

consequentemente

$$\left(u_{f(x)}\,(s\,(x))\right)_{x\in \mathrm{W}} = \left(u_{f(x)}\,\left(t_{f(x)}\right)\right)_{x\in \mathrm{W}} = \left(\left(u(t)\right)_{f(x)}\right)_{x\in \mathrm{W}}$$

pelo que $\left(u_{f(x)}\,(s(x))\right)_{x\in \mathrm{U}} \in f^{-1}\mathrm{G}(\mathrm{U})$, logo $f^{-1}u$ é morfismo de feixes. $\square$

**Observação 2.4.3**

Dado um aberto V de Y e uma secção $t \in \mathrm{G}(\mathrm{V})$, os germes de $s$ definem uma secção de $f^{-1}\mathrm{G}$ sobre $f^{-1}(\mathrm{U})$, i.e. temos o **morfismo de adjunção**

$$\begin{array}{rcl} a(\mathrm{V}) : \mathrm{G}(\mathrm{V}) & \longrightarrow & f^{-1}\mathrm{G}\left(f^{-1}(\mathrm{V})\right). \\ s & \longmapsto & f^{-1}s \overset{\text{def}}{=} \left(s_{f(x)}\right)_{x\in \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{V})} \end{array}$$

Para qualquer aberto $\mathrm{V} \in \mathcal{O}_{f(x)}(\mathrm{Y})$ temos definido o morfismo

$$\mathrm{G}(\mathrm{V}) \xrightarrow{a(\mathrm{V})} f^{-1}\mathrm{G}\left(f^{-1}(\mathrm{V})\right) \longrightarrow \left(f^{-1}\mathrm{G}\right)_x$$

logo tomando o limite indutivo temos definido um morfismo

$$a_x \colon \mathrm{G}_{f(x)} \longrightarrow \left(f^{-1}\mathrm{G}\right)_x.$$

**Proposição 2.4.4** *O morfismo $a_x \colon \mathrm{G}_{f(x)} \longrightarrow \left(f^{-1}\mathrm{G}\right)_x$ é um isomorfismo.*

**Demonstração:**
• injectividade:
Sejam $x \in \mathrm{X}$ e $\sigma, \sigma' \in \mathrm{G}_{f(x)}$ tais que $a_x(\sigma) = a_x(\sigma')$. Por definição de limite indutivo:

$$\exists \mathrm{V}, \mathrm{V}' \in \mathcal{O}_{f(x)}(\mathrm{Y}),\ \exists t \in \mathrm{G}(\mathrm{V})\, \exists t' \in \mathrm{G}(\mathrm{V}') \text{ tais que } \sigma = t_{f(x)} \text{ e } \sigma' = t'_{f(x)}.$$

Temos então:

$$\begin{array}{rcl} a_x(\sigma) = a_x(\sigma') & \Rightarrow & \left(a(\mathrm{V})(t)\right)_x = \left(a(\mathrm{V}')(t')\right)_x \\ & \Rightarrow & t_{f(x)} = t'_{f(x)} \\ & \Rightarrow & \sigma = \sigma', \end{array}$$

logo $a_x$ é injectiva.

• sobrejectividade:
Sejam $x_0 \in \mathrm{X}$ e $s \in \left(f^{-1}\mathrm{G}\right)_{x_0}$. Por definição de limite indutivo existe $\mathrm{W} \in \mathcal{O}_{x_0}(\mathrm{X})$, e existe $\left(s(x)\right)_{x\in\mathrm{U}} \in f^{-1}\mathrm{G}(\mathrm{U})$ tal que $s(x_0) = s$. Por definição de $f^{-1}\mathrm{G}$ existe $\mathrm{W} \in \mathcal{O}_{x_0}(\mathrm{X})$ e existe $\mathrm{V} \in \mathcal{O}_{f(x)}(\mathrm{Y})$, $t \in \mathrm{G}(\mathrm{V})$ tal que $f(\mathrm{W}) \subset \mathrm{V}$ e $\left(s(x)\right)_{x\in\mathrm{W}} = \left(t_{f(x)}\right)_{x\in\mathrm{W}}$ i.e. $\left(s(x)\right)_{x\in\mathrm{W}} = a(\mathrm{W})(t_{\mathrm{W}}) = \left(t_{f(x)}\right)_{x\in\mathrm{W}}$, consequentemente $a_x(t_x) = s(x) = s$. □

**Lema 2.4.5** *Dadas aplicações contínuas $f \colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, $g \colon \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ e $\mathrm{G} \in \mathcal{S}h(\mathrm{Z})$ temos a igualdade $f^{-1}\left(g^{-1}\mathrm{G}\right) = \left(g \circ f\right)^{-1}\mathrm{G}$.*

**Demonstração:** Seja U aberto de X.

• $(g\circ f)^{-1}\mathrm{G}(\mathrm{U})\subset f^{-1}(g^{-1}\mathrm{G})(\mathrm{U})$ Seja $(s(x))_{x\in\mathrm{U}}\in(g\circ f)^{-1}\mathrm{G}(\mathrm{U})$, então

$$\forall x_0\in\mathrm{U}\ \exists\mathrm{U}_{x_0}\in\mathcal{O}_{x_0}(\mathrm{U})\ \exists\mathrm{W}_{g\circ f(x_0)}\in\mathcal{O}_{g\circ f(x_0)}(\mathrm{Z})\ \exists\tau\in\mathrm{G}\left(\mathrm{W}_{g\circ f(x_0)}\right)$$
$$\text{tal que } g\circ f(\mathrm{U}_{x_0})\subset\mathrm{W}_{g\circ f(x_0)}\ \text{ e }\ (s(x))_{x\in\mathrm{U}_{x_0}}=\left(\tau_{g\circ f(x)}\right)_{x\in\mathrm{U}_{x_0}}.$$

Dado que $\tau\in\mathrm{G}\left(\mathrm{W}_{g\circ f(x_0)}\right)$ temos que

$$t\doteq\left(\tau_{g(y)}\right)_{y\in g^{-1}\left(\mathrm{W}_{g\circ f(x_0)}\right)}\in g^{-1}\mathrm{G}\left(g^{-1}\left(\mathrm{W}_{g\circ f(x_0)}\right)\right).$$

Tomando $\mathrm{V}_{f(x_0)}=g^{-1}\left(\mathrm{W}_{g\circ f(x_0)}\right)\supset f(\mathrm{U}_{x_0})$ temos que

$$\forall x_0\in\mathrm{U}\ \exists\mathrm{U}_{x_0}\in\mathcal{O}_{x_0}(\mathrm{U})\ \exists\mathrm{V}_{f(x_0)}\in\mathcal{O}_{f(x_0)}(\mathrm{Y})\ \exists t\in g^{-1}\mathrm{G}\left(\mathrm{V}_{f(x_0)}\right)$$
$$\text{tal que } f(\mathrm{U}_{x_0})\subset\mathrm{V}_{f(x_0)}\ \text{ e }\ (s(x))_{x\in\mathrm{U}_{x_0}}=\left(\tau_{g\circ f(x)}\right)_{x\in\mathrm{U}_{x_0}}=\left(t_{f(x)}\right)_{x\in\mathrm{U}_{x_0}},$$

cosequentemente $(g\circ f)^{-1}\mathrm{G}(\mathrm{U})\subset f^{-1}(g^{-1}\mathrm{G})(\mathrm{U})$.

• $f^{-1}(g^{-1}\mathrm{G})(\mathrm{U})\subset(g\circ f)^{-1}\mathrm{G}(\mathrm{U})$ Seja $(s(x))_{x\in\mathrm{U}}\in f^{-1}(g^{-1}\mathrm{G})(\mathrm{U})$, então

$$\forall x_0\in\mathrm{U}\ \exists\mathrm{U}_{x_0}\in\mathcal{O}_{x_0}(\mathrm{U})\ \exists\mathrm{V}_{f(x_0)}\in\mathcal{O}_{f(x_0)}(\mathrm{Y})\ \exists(t(y))_{y\in\mathrm{V}_{f(x_0)}}\in g^{-1}\mathrm{G}\left(\mathrm{V}_{f(x_0)}\right)$$
$$\text{tal que }\ f(\mathrm{U}_{x_0})\subset\mathrm{V}_{f(x_0)}\ \text{ e }\ (s(x))_{x\in\mathrm{U}_{x_0}}=(t(f(x)))_{x\in\mathrm{U}_{x_0}}.$$

Dado que $(t(y))_{y\in\mathrm{V}_{f(x_0)}}\in g^{-1}\mathrm{G}\left(\mathrm{V}_{\mathrm{f(x_0)}}\right)$ temos que

$$\forall y_0\in\mathrm{V}_{f(x_0)}\ \exists\mathrm{V}'_{y_0}\in\mathcal{O}_{y_0}\left(\mathrm{V}_{f(x_0)}\right)\ \exists\mathrm{W}_{g(y_0)}\in\mathcal{O}_{g(y_0)}(\mathrm{Z})\ \exists\tau\in\mathrm{G}\left(\mathrm{W}_{g(y_0)}\right)$$
$$\text{tal que } g(\mathrm{U}_{y_0})\subset\mathrm{W}_{g(y_0)}\ \text{ e }\ (t(y))_{y\in\mathrm{V}'_{y_0}}=\left(\tau_{g(y)}\right)_{y\in\mathrm{V}'_{y_0}},$$

em particular para $y_0=f(x_0)$

$$\exists\mathrm{V}'_{f(x_0)}\in\mathcal{O}_{f(x_0)}\left(\mathrm{V}_{f(x_0)}\right)\ \exists\mathrm{W}_{g\circ f(x_0)}\in\mathcal{O}_{g\circ f(x_0)}(\mathrm{Z})\ \exists\tau\in\mathrm{G}\left(\mathrm{W}_{g\circ f(x_0)}\right)$$
$$\text{tal que } g\left(\mathrm{V}'_{f(x_0)}\right)\subset\mathrm{W}_{g\circ f(x_0)}\ \text{ e }\ (t(y))_{y\in\mathrm{V}'_{f(x_0)}}=\left(\tau_{g(y)}\right)_{y\in\mathrm{V}'_{f(x_0)}}.$$

Tomando o aberto $\mathrm{U}'_{x_0} = \mathrm{U}_{x_0} \cap f^{-1}\left(\mathrm{V}'_{f(x_0)}\right)$ temos que

$$f\left(\mathrm{U}'_{x_0}\right) \subset \mathrm{V}_{f(x_0)} \ \cap \ \mathrm{V}'_{f(x_0)} \ = \mathrm{V}'_{f(x_0)}.$$

Consequentemente

$$\forall x_0 \in \mathrm{U} \ \exists \mathrm{U}'_{x_0} \in \mathcal{O}_{x_0}(\mathrm{U}) \ \exists \mathrm{W}_{g\circ f(x_0)} \in \mathcal{O}_{g\circ f(x_0)}(\mathrm{Z}) \ \exists \tau \in g^{-1}\mathrm{G}\left(\mathrm{W}_{g\circ f(x_0)}\right)$$

tal que $g\circ f\left(\mathrm{U}'_{x_0}\right) \subset \mathrm{W}_{g\circ f(x_0)}$ e $(s(x))_{x\in \mathrm{U}'_{x_0}} = \left(t_{f(x)}\right)_{x\in \mathrm{U}'_{x_0}} = \left(\tau_{g\circ f(x)}\right)_{x\in \mathrm{U}'_{x_0}}$.

Portanto $f^{-1}(g^{-1}\mathrm{G})(\mathrm{U}) \subset (g\circ f)^{-1}\mathrm{G}(\mathrm{U})$. □

**Lema 2.4.6** *Sejam* X *um aberto de um espaço toplógico* Y, $j\colon \mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{Y}$ *a aplicação inclusão e* F *um feixe sobre* Y. *Então*

$$j^{-1}\mathrm{F} \simeq \mathrm{F}|_{\mathrm{X}}.$$

**Demonstração:** Seja $\mathrm{U} \subset \mathrm{X}$ um aberto.

$$\begin{aligned} j^{-1}\mathrm{F}(\mathrm{U}) &= \Big\{(s(x))_{x\in\mathrm{U}} \in j^{\circ}\mathrm{F}(\mathrm{U}) \Big| \ \forall x_0 \in \mathrm{U}\ \exists \mathrm{W} \in \mathcal{O}_{x_0}(\mathrm{U})\, \exists \mathrm{V} \in \mathcal{O}_{x_0}(\mathrm{Y}) \\ &\qquad \exists t \in \mathrm{F}(\mathrm{V}) \ \text{ tal que } \ \mathrm{W} \subset \mathrm{V} \text{ e } (s(x))_{x\in\mathrm{W}} = (t_x)_{x\in\mathrm{W}} \Big\} \\ &= \Big\{(s(x))_{x\in\mathrm{U}} \in \tilde{\mathrm{F}}(\mathrm{U}) \Big| \ \forall x_0 \in \mathrm{U}\ \exists \mathrm{V} \in \mathcal{O}_{x_0}(\mathrm{U}) \ \exists t \in \mathrm{F}(\mathrm{V}) \\ &\qquad \text{tal que } \ (s(x))_{x\in\mathrm{V}} = (t_x)_{x\in\mathrm{V}} \Big\} \\ &= \mathrm{F}^{+}(\mathrm{U}) \end{aligned}$$

logo $j^{-1}\mathrm{F} = \mathrm{F}^{+}|_{\mathrm{X}}$, como F é feixe, pela Proposição 2.3.10 $j^{-1}\mathrm{F} \simeq \mathrm{F}|_{\mathrm{X}}$. □

Faz então sentido darmos a seguinte definição:

**Definição 2.4.7** *Dados* $\mathrm{F} \in \mathcal{S}h(\mathrm{X})$, $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$ *com a topologia induzida e* $j\colon \mathrm{Y} \hookrightarrow \mathrm{X}$ *a inclusão*

$$\mathrm{F}|_{\mathrm{Y}} \overset{\text{def}}{=} j^{-1}\mathrm{F}.$$

**Lema 2.4.8** *Seja* $f\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *uma aplicação contínua e* F *um feixe localmente constante sobre* Y, *então* $f^{-1}\mathrm{F}$ *é um* $\mathcal{A}-$ *módulo localmente constante sobre* X.

**Demonstração:** Seja $(\mathrm{U}_i)_{i\in I}$ uma cobertura aberta de Y tal que $\mathrm{F}|_{\mathrm{U}_i}$ é um feixe constante de fibra A, i.e. $\mathrm{F}|_{\mathrm{U}_i} \simeq \underline{\mathrm{A}}^{d_i}_{\mathrm{U}_i}$. Sem perda de generalidade vamos supor que os $\mathrm{U}_i$ são conexos. Seja $(\mathrm{V}_j)_{j\in J}$ a cobertura aberta de X obtida a partir da cobertura $(f^{-1}(\mathrm{U}_i))_{i\in I}$ decompondo $f^{-1}(\mathrm{U}_i)$ nas suas componentes conexas.

Vamos ver que $f^{-1}\mathrm{F}|_{\mathrm{V}_j}$ é um feixe constante. Seja $\mathrm{U} \subset \mathrm{V}_j$ um aberto

$$\begin{aligned} f^{-1}\mathrm{F}(\mathrm{U}) &= \Big\{(s(x))_{x\in\mathrm{U}} \in f^{\circ}\mathrm{F}(\mathrm{U}) \,\Big|\, \forall x_0 \in \mathrm{U}\; \exists \mathrm{W} \in \mathcal{O}_{x_0}(\mathrm{U})\; \exists \mathrm{V} \in \mathcal{O}_{f(x_0)}(\mathrm{Y}) \\ &\qquad \exists t \in \mathrm{F}(\mathrm{V}) \;\text{ tal que }\; f(\mathrm{W}) \subset \mathrm{V} \text{ e } (s(x))_{x\in\mathrm{W}} = \big(t_{f(x)}\big)_{x\in\mathrm{W}}\Big\} \end{aligned}$$

Dado que $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{U}_i$ para algum $i \in I$, temos que

$$\begin{aligned} f^{-1}\mathrm{F}(\mathrm{U}) &= \Big\{(s(x))_{x\in\mathrm{U}} \in \prod_{x\in\mathrm{U}} \mathrm{A}^{d_i} \,\Big|\, \forall x_0 \in \mathrm{U}\; \exists \mathrm{W} \in \mathcal{O}_{x_0}(\mathrm{U})\; \exists \mathrm{V} \in \mathcal{O}_{f(x_0)}(\mathrm{Y}) \\ &\qquad \exists t \in \mathrm{F}(\mathrm{V}) \;\text{ tal que }\; f(\mathrm{W}) \subset \mathrm{V} \text{ e } (s(x))_{x\in\mathrm{W}} = \big(t_{f(x)}\big)_{x\in\mathrm{W}}\Big\} \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade W é conexo e da mesma forma podemos supor que V é conexo, logo $\mathrm{F}(\mathrm{U}) \simeq \mathrm{A}^{d_i}$, consequentemente

$$\begin{aligned} f^{-1}\mathrm{F}(\mathrm{U}) &= \Big\{(s(x))_{x\in\mathrm{U}} \in \prod_{x\in\mathrm{U}} \mathrm{A}^{d_i} \,\Big|\, \forall x_0 \in \mathrm{U}\; \exists \mathrm{W} \in \mathcal{O}_{x_0}(\mathrm{U}) \;\text{ tal que} \\ &\qquad (s(x))_{x\in\mathrm{W}} = \big(t_{f(x)}\big)_{x\in\mathrm{W}}\Big\} \\ &= \underline{\mathrm{A}}^{d_i}_{\mathrm{V}_i}(\mathrm{U}). \end{aligned}$$

Logo $f^{-1}\mathrm{F}|_{\mathrm{V}_i} \simeq \underline{\mathrm{A}}^{d_i}_{\mathrm{V}_i}$, logo $f^{-1}\mathrm{F}$ é um feixe localmente constante. □

### 2.4.2 O feixe imagem directa

**Definição 2.4.9 (feixe imagem directa)** *Seja $f\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ uma aplicação contínua. Dado um feixe* F *sobre* X, *define-se* $f_*\mathrm{F}$ *sobre* X *(**feixe imagem directa**) do seguinte modo*

$$f_*\mathrm{F}(\mathrm{U}) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{F}(f^{-1}(\mathrm{U})), \qquad (\mathrm{U} \text{ aberto de X}),$$

*com os morfismos de restrição induzidos pelos de* F.

## 2.5 Colagem de feixes

**Definição 2.5.1** *Seja* $(\mathrm{U}_i)_{i\in I}$ *uma cobertura aberta de um espaço topológico* X*. Associemos a cada* $i \in I$ *um feixe* $\mathrm{F}_i$ *sobre* $\mathrm{X}_i$*. Dado um par* $(i,j)$ *de elementos de* $I$ *fixemos um isomorfismo*

$$\varphi_{ij}\colon \mathrm{F}_i|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j} \longrightarrow \mathrm{F}_j|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j}$$

*de tal forma que*

*(i)* $\varphi_{ii} = id_{\mathrm{F}_i}$, $\forall i \in I$
*(ii)* $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}^{-1}$, $\forall i,j \in I$
*(iii)* $\varphi_{jk}|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j\cap\mathrm{U}_k} \circ \varphi_{ij}|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j\cap\mathrm{U}_k} = \varphi_{ik}|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j\cap\mathrm{U}_k}$, $\forall i,j.k \in I$

*Dizemos que um feixe* F *sobre* X *é a* ***colagem*** *dos feixes* $\mathrm{F}_i$ *se existem isomorfismos*

$$\varphi_i\colon \mathrm{F}|_{\mathrm{U}_i} \longrightarrow \mathrm{F}_i$$

*tais que o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F}_i|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j} \arrow[dr, "\varphi_{ij}"] & \\
\mathrm{F}|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j} \arrow[u, "\varphi_i|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j}"] \arrow[r, "\varphi_j|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j}"'] & \mathrm{F}_j|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j}
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

**Teorema 2.5.2** *Dada uma família de feixes* $(\mathrm{F}_i)_{i\in I}$ *sobre uma família de abertos* $(\mathrm{U}_i)_{i\in I}$ *e uma família de morfismos* $(\varphi_{ij}\colon \mathrm{F}_i|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j} \to \mathrm{F}_j|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j})_{i,j\in I}$ *verificando as condições da Definição 2.5.1, então a colagem desta famíla de feixes existe e é única a menos de um único isomorfismo, ou seja se* F *e* G *são colagens dos feixes* $\mathrm{F}_i$*, então existe um e um só isomorfismo* $\varphi\colon \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *tal que o diagrama abaixo comuta para qualquer* $i \in I$*.*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F}|_{\mathrm{U}_i} \arrow[dr, "\varphi_{\mathrm{U}_i}"] & \\
\mathrm{F}_i \arrow[u, "\varphi_i^{\mathrm{F}}"] \arrow[r, "\varphi_i^{\mathrm{G}}"'] & \mathrm{G}|_{\mathrm{U}_i}
\end{tikzcd} \qquad (**)$$

**Demonstração:** Seja F o pré-feixe sobre X definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(\mathrm{U}) &= \Big\{ (s_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{F}_i(\mathrm{U}_i\cap \mathrm{U}) \Big| \ \forall i,j\in I \\ &\qquad \varphi_{ij}(\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j\cap\mathrm{U})\left(s_i|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j\cap\mathrm{U}}\right) = s_j|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j\cap\mathrm{U}} \Big\} \end{aligned}$$

onde U é aberto de X. Dados U, V abertos de X tais que V $\subset$ U, o morfismo de restrição é dado por

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{VU}}: \mathrm{F}(\mathrm{U}) &\longrightarrow \mathrm{F}(\mathrm{V}). \\ (s_i)_{i\in I} &\longmapsto (s_i|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{V}})_{i\in I} \end{aligned}$$

• Mostremos que F verifica $S_1$.
Sejam $(\mathrm{V}_j)_{j\in J}$ uma cobertura aberta de V, $(s_i)_{i\in I}\in \mathrm{F}(\mathrm{V})$, tais que

$$\forall j\in J \quad (s_i)_{i\in I}|_{\mathrm{V}_j} = 0$$

logo para qualquer $j\in J$, $\left(s_i|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j}\right)_{i\in I}=0$, i.e. para quaisquer $i\in I$, $j\in J$ $s_i|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j}=0$, como $\mathrm{F}_i$ é feixe $s_i=0$, consequentemente $(s_i)_{i\in I}=0$.

• Mostremos que F verifica $S_2$.
Sejam V aberto de X, $(\mathrm{V}_j)_{j\in J}$ uma cobertura aberta de V e $(s(j)_i)_{i\in I}\in \mathrm{F}(\mathrm{V}_j)$, i.e. $s(j)_i\in \mathrm{F}_i(\mathrm{U}_i\cap \mathrm{V}_j)$, tais que

$$(s(j_1)_i)_{i\in I}|_{\mathrm{V}_{j_1}\cap\mathrm{V}_{j_2}} = (s(j_2)_i)_{i\in I}|_{\mathrm{V}_{j_1}\cap\mathrm{V}_{j_2}}$$

então para cada $i\in I$

$$s(j_1)_i|_{\mathrm{V}_{j_1}\cap\mathrm{V}_{j_2}\cap\mathrm{U}_i} = s(j_2)_i|_{\mathrm{V}_{j_1}\cap\mathrm{V}_{j_2}\cap\mathrm{U}_i}.$$

Como $\mathrm{F}_i$ é feixe então existe $\sigma_i\in \mathrm{F}(\mathrm{U}_i\cap\mathrm{V})$ tal que $\sigma_i|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{V}_j}=s(j)_i$, logo existe $(\sigma_i)_{i\in I}|_{\mathrm{V}_j}=(s(j)_i)_{i\in I}$.
Logo F é um feixe sobre X.

• Mostremos que $\mathrm{F}|_{\mathrm{U}_i}\simeq \mathrm{F}_i$.
Seja $i_0\in I$ e V $\subset \mathrm{U}_{i_0}$ um aberto, temos então definido o seguinte morfismo

$$\begin{aligned} \Psi_{i_0}(\mathrm{V}): \mathrm{F}_{i_0}(\mathrm{V}) &\longrightarrow \mathrm{F}(\mathrm{V}) \\ s &\longmapsto (s|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{V}})_{i\in I} \end{aligned}$$

Seja $s \in \mathrm{F}_{i_0}(\mathrm{V})$ tal que $\Psi_{i_0}(\mathrm{V})(s) = (s|_{\mathrm{U}_i \cap \mathrm{V}})_{i \in I} = 0$, em particular para a componente $i_0$ temos $s|_{\mathrm{V}} = s = 0$, logo $\Psi_{i_0}$ é injectiva.

Seja $(s_i)_{i \in I} \in \mathrm{F}(\mathrm{V})$, como

$$\varphi_{i_0 j}(\mathrm{U}_{i_0} \cap \mathrm{U}_j \cap \mathrm{V})\left(s_{i_0}|_{\mathrm{U}_{i_0} \cap \mathrm{U}_j \cap \mathrm{V}}\right) = s_j|_{\mathrm{U}_{i_0} \cap \mathrm{U}_j \cap \mathrm{V}} = s_j|_{\mathrm{U}_j \cap \mathrm{V}} = s_j,$$

temos que

$$(s_i)_{i \in I} = \left(\varphi_{i_0 j}(\mathrm{U}_{i_0} \cap \mathrm{U}_j \cap \mathrm{V})\left(s_{i_0}|_{\mathrm{U}_{i_0} \cap \mathrm{U}_j \cap \mathrm{V}}\right)\right)_{j \in I}$$

logo $(s_i)_{i \in I} = \Psi_{i_0}(\mathrm{V})(s_{i_0})$, logo $\Psi_{i_0}$ é sobrejectiva.

• Mostremos que o seguinte diagrama é comutativo, onde $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_j$ e $\varphi_i^{-1} = \Psi_i$ para qualquer $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F}_i(\mathrm{V}) \arrow[d, "\varphi_i^{-1}(\mathrm{V})"'] \arrow[dr, "\varphi_{ij}(\mathrm{V})"] & \\
\mathrm{F}(\mathrm{V}) & \mathrm{F}_j(\mathrm{V}) \arrow[l, "\varphi_j^{-1}(\mathrm{V})"]
\end{tikzcd}$$

Seja $s \in \mathrm{F}_i(\mathrm{V})$, como para qualquer $s \in \mathrm{F}_i(\mathrm{V})$

$$\begin{aligned}
\varphi_j^{-1}(\mathrm{V}) \circ \varphi_{ij}(\mathrm{V})(s) &= \varphi_j^{-1}(\varphi_{ij}(\mathrm{V})(s)) \\
&= (\varphi_{jk}(\mathrm{V}) \circ \varphi_{ij}(\mathrm{V})(s|_{\mathrm{U}_k \cap \mathrm{V}}))_{k \in I} \\
&= (\varphi_{ik}(\mathrm{V})(s|_{\mathrm{U}_k \cap \mathrm{V}}))_{k \in I} \\
&= \varphi_i^{-1}(s).
\end{aligned}$$

Pelo que o diagrama $(*)$ é comutativo, consequentemente F é uma colagem de feixes.

• Mostremos que a colagem é única a menos de um único isomorfismo. Sejam F, G colagens de feixes que tornem o diagrama $(**)$ comutativo. Seja U aberto de X e $s \in \mathrm{F}(\mathrm{U})$, definimos um morfismo $\psi\colon \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ do seguinte modo

$$\begin{aligned}
\psi(\mathrm{U}) : \mathrm{F}(\mathrm{U}) &\longrightarrow \mathrm{G}(\mathrm{U}) \\
s &\longmapsto \sigma
\end{aligned}$$

onde $\sigma$ é a colagem da família $\psi\left(s|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j}\right)_{i\in I}$, a qual é única pois G é feixe.

Sejam $\varphi,\ \psi\colon \mathrm{F}\to\mathrm{G}$ morfismos de feixes que tornam o diagrama $(**)$ comutativo. Como $\varphi_x=\varphi^{\mathrm{G}}_{ix}\circ\left(\varphi^{\mathrm{F}}_{ix}\right)^{-1}=\psi_x$ para qualquer $x\in\mathrm{X}$, então pela Proposição 2.3.7 $\varphi=\psi$, além do mais como $\psi_x$ é um isomorfismo para qualquer $x\in\mathrm{X}$, então pela Proposição 2.3.4 $\psi$ é um isomorfismo. □

## 2.6 Feixes localmente constantes

**Definição 2.6.1** *Sejam* $\mathrm{F}\in\mathcal{S}h(\mathrm{X})$ *e* U *um aberto de* X. *Dado* $s\in\mathrm{F}(\mathrm{U})$ *chama-se* ***suporte*** *de* $s$ *e denota-se por* supp $s$, *ao conjunto* $\{x\in\mathrm{U}\mid s_x\neq 0\}$.

**Definição 2.6.2** *Dado* $\mathrm{F}\in\mathcal{S}h(\mathrm{X})$ *diz-se que* F *verifica o* ***princípio do prolongamento analítico*** *(p.p.a.) se toda a secção de* F *tem suporte aberto.*

**Exemplo 2.6.3**

Dada uma variedade analítica complexa X, $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ verifica p.p.a. Tal é consequência de $\mathcal{O}_{\mathrm{X},x}\simeq\mathbb{C}\{z_1,\cdots,z_n\}$.

**Lema 2.6.4** *Seja* F *um feixe que verifica p.p.a. Sejam* U *um aberto conexo de* X *e* $s,t\in\mathrm{F}(\mathrm{U})$, *então* $s=t$ *se e só se existe* $x\in\mathrm{U}$ *tal que* $s_x=t_x$.

**Demonstração:**
$\Rightarrow$ ) Imediata.
$\Leftarrow$ ) Seja $\mathrm{W}=\{x\in\mathrm{U}\mid s_x=t_x\}\subset\mathrm{U}$
• por hipótese $\mathrm{W}\neq\varnothing$
• Dado $x_0\in\mathrm{U}$

$$\begin{aligned} s_{x_0}=t_{x_0} &\Rightarrow s_{x_0}-t_{x_0}=0\\ &\Rightarrow (s-t)_{x_0}=0\\ &\Rightarrow \exists\mathrm{V}_{x_0}\text{ tal que } (s-t)|_{\mathrm{V}_{x_0}}=0\\ &\Rightarrow \forall x\in\mathrm{V}_{x_0}\ s_x=t_x\end{aligned}$$

logo W é aberto.
• da igualdade de conjuntos

$$\mathrm{W}=\{x\in\mathrm{U}\mid (s-t)_x=0\}=(\mathrm{supp}s)^{\mathrm{C}}$$

temos que W é fechado.

Como W é conexo temos que para qualquer $x\in\mathrm{U}$ $(s-t)_x=0$. Pelo Lema 2.3.3 $s-t=0$, logo $s=t$. □

**Lema 2.6.5** *Dado* $\mathrm{F} \in \mathcal{S}h(\mathrm{X})$, *são equivalentes as seguintes afirmações:*
*(i)* $\mathrm{F}$ *verifica p.p.a.*
*(ii) Existe uma cobertura aberta* $(\mathrm{U}_i)_{i\in I}$ *de* $\mathrm{X}$ *tal que para qualquer* $i \in I$ $\mathrm{F}|_{\mathrm{U}_i}$ *verifica p.p.a.*

**Demonstração:**
(i) $\Rightarrow$ (ii) Imediata, basta tomar a cobertura X.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Seja U aberto de X e $s \in \mathrm{F}(\mathrm{U})$

$$\begin{aligned} (\operatorname{supp} s)^{\mathrm{C}} &= \{x \in \mathrm{U} \mid s_x \neq 0\} \\ &= \bigcup_{i\in I} \{x \in \mathrm{U}_i \mid (s|_{\mathrm{U}_i})_x \neq 0\} \\ &= \bigcup_{i\in I} \operatorname{supp} s|_{\mathrm{U}_i} \end{aligned}$$

Como $\mathrm{F}|_{\mathrm{U}_i}$ verifica p.p.a. então supp $s$ é aberto, logo F verifica p.p.a. □

**Corolário 2.6.6** *Seja* $\mathrm{F} \in \mathcal{S}h(\mathrm{X})$ *um feixe localmente constante, então* $\mathrm{F}$ *verifica p.p.a.*

**Demonstração:** Seja $(\mathrm{U}_i)_{i\in I}$ uma cobertura aberta trivializante, então $\mathrm{F}|_{\mathrm{U}_i} \simeq \underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{U}_i}^{d_i}$. como $\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{U}_i}^{d_i}$ verifica p.p.a. temos que F verifica p.p.a. □

**Lema 2.6.7** *Sejam* $\mathrm{X}$, $\mathrm{Y}$ *espaços topológicos e* $\varphi\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *uma aplicação contínua. Dado* $\mathrm{F} \in \mathcal{S}h(\mathrm{X})$ *se* $\mathrm{F}$ *verifica p.p.a. então* $\varphi^{-1}\mathrm{F}$ *verifica p.p.a.*

**Demonstração:** SejaU aberto de X e $(s(x))_{x\in\mathrm{U}} \in \varphi^{-1}\mathrm{F}(\mathrm{U})$. Seja $x_0 \in \mathrm{U}$ tal que $s(x_0) \neq 0$, por definição de feixe imagem inversa

$$\exists \mathrm{W}_{x_0} \in \mathcal{O}_{x_0}(\mathrm{U})\, \exists \mathrm{V}_{f(x_0)} \in \mathcal{O}_{f(x_0)}(\mathrm{Y})\, \exists t \in \mathrm{F}\left(\mathrm{V}_{f(x_0)}\right) \text{ tal que}$$

$$f(\mathrm{W}_{x_0}) \subset \mathrm{V}_{f(x_0)} \text{ e } (s(x))_{x\in\mathrm{W}_{x_0}} = \left(t_{f(x)}\right)_{x\in\mathrm{W}_{\mathrm{x}_0}}.$$

Como $s(x_0) \neq 0$ então $t_{f(x_0)} \neq 0$, como F verifica p.p.a. então

$$\exists \mathrm{V}'_{f(x_0)} \subset \mathrm{V}_{f(x_0)} \text{ tal que } \forall y \in \mathrm{V}'_{f(x_0)}\ t_y \neq 0$$

em particular

$$\forall x \in \mathrm{W}_{x_0} \cap f^{-1}\left(\mathrm{V}'_{f(x_0)}\right) \quad t_{f(x)} \neq 0$$

logo

$$\forall x \in \mathrm{W}_{x_0} \cap f^{-1}\left(\mathrm{V}'_{f(x_0)}\right) \quad s(x) \neq 0.$$

Como

$$\{x_0\} \subset \mathrm{W}_{x_0} \cap f^{-1}\left(\mathrm{V}'_{f(x_0)}\right) \subset \{x \in \mathrm{U} \mid \ s(x) \neq 0\} = \operatorname{supp}(s(x))_{x\in\mathrm{U}},$$

então $\operatorname{supp}(s(x))_{x\in\mathrm{U}} = \bigcup\limits_{x_0 \in \{x\in\mathrm{U} \mid s(x)\neq 0\}} \mathrm{W}_{x_0} \cap f^{-1}\left(\mathrm{V}'_{f(x_0)}\right)$ é aberto, logo $\varphi^{-1}\mathrm{F}$ verifica p.p.a. □

**Definição 2.6.8** *Seja $x$ um ponto do plano complexo e $s \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},x}$ um germe de função analítica. Dada uma curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, com $\gamma(a) = x$, chama-se **prolongamento analítico** de $s$ ao longo de $\gamma$ a uma secção $f \in \gamma^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}}([a,b])$ cujo o germe em $a$ é $s$.*

Pelo Lema 2.6.4 o prolongamento analítico se existir é única.

**Lema 2.6.9** *Podemos associar um prolongamento analítico $f$ de $s$ a um subconjunto $\{a_0, \cdots a_n\}$ de pontos de $[a,b]$ tais que $a_0 = a$, $a_n = b$, $a_i < a_{i+1}$ e séries de potências $s_i \in \mathbb{C}\{x - c_i\}$, com raios de convergência $r_i > 0$ tais que*

*(i) $\gamma([a,b]) \subset \bigcup\limits_{i=0}^{n} \mathrm{B}_{r_i}(c_i)$*

*(ii) $s_i|_{\mathrm{B}_{r_i}(c_i)\cap\mathrm{B}_{r_{i+1}}(c_{i+1})} = s_{i+1}|_{\mathrm{B}_{r_i}(c_i)\cap\mathrm{B}_{r_{i+1}}(c_{i+1})}$, $\forall_{i=0}^{n-1}$*

*(iii) $s_o = s$*

*Onde $c_i = \gamma(a_i)$ e $\mathrm{B}_{r_i}(c_i) = \left\{z \in \mathbb{C} \middle| \ |z - c_i| < r_i\right\}$*

Mostra-se assim que a definição clássica de prolongamento analítico coincide com a nossa.

**Demonstração:** Por definição de feixe imagem inversa temos que

$$\forall x_0 \in [a,b]\, \exists \mathrm{W}_{x_0} \in \mathcal{O}_{x_0}([a,b])\, \exists \mathrm{V}_{\gamma(x_0)} \in \mathcal{O}_{\gamma(x_0)}(\mathbb{C})\, \exists s^{x_0} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}\left(\mathrm{V}_{\gamma(x_0)}\right)$$

$$\text{tal que } \gamma(\mathrm{W}_{x_0}) \subset \mathrm{V}_{\gamma(x_0)} \text{ e } (f_x)_{x\in\mathrm{W}_{x_0}} = (s^{x_0}_x)_{x\in\mathrm{W}_{\mathrm{x}_0}},$$

onde $s^{x_0} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}\left(\mathrm{V}_{\gamma(x_0)}\right)$ então, restrigindo a um a bola $\mathrm{B}_{r_{x_0}}(\gamma(x_0)) \subset \mathrm{V}_{\gamma(x_0)}$ com $r_{x_0}$ suficientemente pequeno, podemos considerar que $s^{x_0}$ é representado por uma série de potências. A família $(s^{x_0})_{x_0\in[a,b]}$ verifica as seguintes propriedades

(i) $\gamma([a,b]) \subset \bigcup\limits_{x_0\in[a,b]} \mathrm{B}_{r_{x_0}}(\gamma(x_0))$

(ii) $s^{x_0}|_{\mathrm{B}_{r_{x_0}}(\gamma(x_0))\cap\mathrm{B}_{r_{x_1}}(\gamma(x_1))} = s^{x_1}|_{\mathrm{B}_{r_{x_0}}(\gamma(x_0))\cap\mathrm{B}_{r_{x_1}}(\gamma(x_1))}$, $\forall x_0,\ x_1 \in [a,b]$

(iii) $s^a = s$

Como $[a,b]$ é compacto $\gamma([a,b])$ é compacto pois $\gamma$ é contínua. Por compacidade de $\gamma([a,b])$ podemos encontrar uma subcobertura finita de $\left(\mathrm{B}_{r_{x_0}}(\gamma(x_0))\right)_{x_0\in[a,b]}$, restrigindo algumas das secções a bolas mais pequenas, se necessário, obtemos o resultado pretendido. □

**Teorema 2.6.10 (da monodromia)** *Seja* X *uma aberto conexo do plano complexo, $x$ um ponto de* X *e $s$ um germe de função analítica em $x$, que admite continuação analítica ao longo de qualquer curva contínua $\gamma\colon [a,b]\to$* X *tal que $\gamma(a) = x$. Sejam $\alpha,\beta\colon [a,b]\to$* X *duas curvas contínuas tais que $\alpha(a) = \beta(a) = x$ e $\alpha(b) = \beta\alpha(b) = y$. Se $\alpha$ e $\beta$ são homotópicas então os prolongamentos analíticos de $s$ ao longo de $\alpha$ e $\beta$ têm o mesmo germe em $b$.*

**Demonstração:** Seja $H\colon [a,b]\times[0,1]\to \mathrm{X}$ uma homotopia que deforma $\alpha$ em $\beta$. Sejam $I_\theta = [a,b]\times\{\theta\}$ e $H_\theta\colon I_\theta\to\mathrm{X}$ a curva definida por $H_\theta(t) = H(t,\theta)\,,\ \theta\in[0,1]\,.$

Seja $f_\theta\in H^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(I_\theta)$ o prolongamento analítico de $s$ ao longo de $H_\theta$. Seja $j_\theta\colon I_\theta\hookrightarrow[a,b]\times[0,1]$ a inclusão. Então pelo Lema 2.4.5

$$H_\theta^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(I_\theta) = j_\theta^{-1}\left(H^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{X}}\right)(I_\theta)\,.$$

Como $I_\theta$ e $[a,b]\times[0,1]$ são compactos existe para cada $\theta$ um representante

$$\tilde{f}_\theta\in H^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{X}}([a,b]\times\mathrm{V}_\theta)$$

de $f_\theta$, onde $\mathrm{V}_\theta$ é um intervalo contido em $[0,1]$ que contém $\theta$ e é aberto em $[0,1]$. Se $\mathrm{V}_{\theta_1}\cap\mathrm{V}_{\theta_2}\neq\varnothing$ então $\tilde{f}_{\theta_1}$ e $\tilde{f}_{\theta_2}$ coincidem em $\{a\}\times(\mathrm{V}_{\theta_1}\cap\mathrm{V}_{\theta_2})$. Uma vez que $\tilde{f}_{\theta_1}$ e $\tilde{f}_{\theta_2}$ são funções contínuas coincidem num conjunto fechado. Dado que o feixe $H^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ verifica p.p.a. (Lema 2.6.7), $\tilde{f}_{\theta_1}$ e $\tilde{f}_{\theta_2}$ coincidem num aberto. Concluimos então que as funções $\tilde{f}_{\theta_1}$ e $\tilde{f}_{\theta_2}$ coincidem na intercepção dos seus domínios. Como tal, podemos colar as secções $\tilde{f}_\theta$ numa secção

$$f\in H^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{X}}([a,b]\times[0,1])\,.$$

Como a restrição de $H$ a $\{b\}\times[0,1]$ é uma aplicação constante então

$$H^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{X}}|_{\{b\}\times[0,1]}$$

é o feixe constante de fibra $\mathcal{O}_{\mathrm{X},y}$ em virtude da Proposição 2.4.4. Como tal a fibra de $f$ em $(b,\theta)$ não depende de $\theta$. □

Vamos generalizar os resultados acima sobre funções analíticas, ao quadro dos feixes localmente constantes.

**Lema 2.6.11** *Todo o feixe localmente constante sobre $[0,1]$ é constante*

**Demonstração:** Seja F um feixe localmente constante sobre $[0,1]$. Existe uma família $(I_t)_{t\in J}$ de intervalos contidos em $[0,1]$, abertos em $[0,1]$, tais que $\mathrm{F}|_{I_t}$ é constante, para qualquer $t \in J$. Como $[0,1]$ é compacto podemos supor $J = \{0,1,2,\cdots,n\}$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Podemos ainda supor que se $k < l$, $\inf I_k < \inf I_l$, $\sup I_k < \sup I_l$.

Vejamos que o morfismo canónico $\mathrm{F}([0,1]) \to \mathrm{F}_0$ é sobrejectivo. Dado $s \in \mathrm{F}_0$, existe $s^0 \in \mathrm{F}(I_0)$ tal que $(s^0)_0 = s$ (pois $\mathrm{F}|_{I_0}$ é um feixe constante). Tomemos $x_1 \in I_0 \cap I_1$. Então existe $s^1 \in \mathrm{F}(I_1)$ tal que $(s^1)_{x_1} = (s^0)_{x_1}$. Pelo p.p.a. $s^0$ e $s^1$ coincidem na intercepção dos seus domínios, como tal existe $\tilde{s}^1 \in \mathrm{F}(I_0 \cup I_1)$ tal que $(\tilde{s}^1)_0 = s$. Iterando o processo construimos $\tilde{s} \in \mathrm{F}([0,1])$ tal que $(\tilde{s})_0 = s$.

A injectividade é uma consequência imediata do Lema 2.6.4. Por aplicação do Lema 2.3.17 temos então que F é um feixe constante. $\square$

**Lema 2.6.12** *Todo o feixe localmente constante sobre $[a,b] \times [0,1]$ é constante.*

**Demonstração:** Seja F um feixe localmente constante sobre $[a,b] \times [0,1]$. Existe uma cobertura $(\mathrm{U}_i)_{i\in I}$ de $[a,b]\times[0,1]$ tal que $\mathrm{F}|_{\mathrm{U}_i}$ é um feixe constante. Dado que os rectângulos da forma $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\times]y-\delta, y+\delta[\cap[a,b]\times[0,1]$, com $\varepsilon,\ \delta > 0$ formam uma base de abertos, podemos supor que a cobertura é formada por rectângulos. Por compacidade de $[a,b]\times[0,1]$ podemos encontrar uma subcobertura finita formada por rectângulos. Escolhendo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande podemos supor que a cobertura de abertos é da forma $\left]a - \frac{(b-a)(j-1)}{2n}, a + \frac{(b-a)(j+1)}{2n}\right[ \times \left] \frac{i-1}{2n}, \frac{i+1}{2n} \right[ \cap [a,b]\times[0,1]$, $i,j \in \{0,1,2,\cdots,n\}$.

Aplicando o mesmo argumento utilizado na demostração do Lema 2.6.11 temos que para qualquer $i \in \{0,1,2,\cdots,n\}$ $\mathrm{F}|_{[a,b]\times]\frac{i-1}{2n},\frac{i+1}{2n}[\cap[a,b]\times[0,1]}$ é um feixe constante. Tornando a aplicar o mesmo raciocínio temos então que $\mathrm{F}\Big|_{[a,b]\times[0,1]}$ é um feixe constante. $\square$

A próxima proposição permite generalizar o conceito de prolongamento analítico.

**Proposição 2.6.13** *Seja X um espaço topológico e $\gamma\colon [a,b] \to \mathrm{X}$ uma aplicação contínua. Dado um feixe F sobre X localmente constante temos definido o isomorfismo $\varphi_\gamma\colon \mathrm{F}_{\gamma(a)} \to \mathrm{F}_{\gamma(b)}$ dado pela composição (cf. Proposição 2.4.4)*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{F}_{\gamma(a)} & \xrightarrow{\sim} & \left(\gamma^{-1}\mathrm{F}\right)_a & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_\gamma} & \left(\gamma^{-1}\mathrm{F}\right)_b & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{F}_{\gamma(b)} \\ & & s & \longmapsto & (\tilde{s})_b & & \end{array}$$

*onde $\tilde{s}$ é o único elemento de $\gamma^{-1}\mathrm{F}([a,b])$ tal que $(\tilde{s})_a = s$.*

**Demonstração:** Consequência imediata do Lema 2.3.17. $\square$

**Lema 2.6.14** *Seja* X *um espaço topológico e* $H\colon [a,b]\times[0,1]\to \mathrm{X}$ *uma aplicação contínua. Dado um feixe* F *sobre* X *localmente constante temos definido o isomorfismo* $\varphi_{H_t}\colon \mathrm{F}_{H(a,t)}\to \mathrm{F}_{H(b,t)}$ *dado pela composição*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{F}_{H(a,t)} & \xrightarrow{\sim} & \left(H^{-1}\mathrm{F}\right)_{(a,t)} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{H_t}} & \left(H^{-1}\mathrm{F}\right)_{(b,t)} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{F}_{H(b,t)}, \\ & & s & \longmapsto & (\tilde{s})_{(b,t)} & & \end{array}$$

*onde* $\tilde{s}$ *é o único elemento de* $H^{-1}\mathrm{F}\left([a,b]\times[0,1]\right)$ *tal que* $(\tilde{s})_{(a,t)}=s$.

**Demonstração:** Consequência imediata do Lema 2.3.17. $\square$

De igual forma podemos generalizar o teorema da monodromia ao quadro dos feixes localmente constantes.

**Proposição 2.6.15** *Seja* X *um espaço topológico conexo e localmente conexo por arcos. Seja* F *um feixe localmente constante sobre* X*. Dados* $\alpha,\beta\colon [a,b]\to$ X *duas curvas contínuas tais que* $\alpha(a)=\beta(a)=x$ *e* $\alpha(b)=\beta(b)=y$*, se* $\alpha$ *e* $\beta$ *são homotópicas então* $\varphi_\alpha=\varphi_\beta$.

**Demonstração:** Seja $H\colon [a,b]\times[0,1]\to \mathrm{X}$ uma aplicação contínua. Vamos começar por mostrar que dado $\left(s\left(x,y\right)\right)_{(x,y)\in[a,b]\times[0,1]}\in H^{-1}\mathrm{F}\left([a,b]\times[0,1]\right)$ então existe U aberto de X tal que $[a,b]\times[0,1]\subset \mathrm{U}$ e existe $\tau\in \mathrm{F}\left(\mathrm{U}\right)$ tal que $s=H^{-1}\tau$.

$\left(s\left(x,y\right)\right)_{(x,y)\in[a,b]\times[0,1]}\in H^{-1}\mathrm{F}\left([a,b]\times[0,1]\right)$ se e só se

$$\forall (x_0,y_0)\in[a,b]\times[0,1]\ \exists \mathrm{W}_{(x_0,y_0)}\in\mathcal{O}_{(x_0,y_0)}\left([a,b]\times[0,1]\right)$$

$$\exists \mathrm{V}_{H(x_0,y_0)}\in\mathcal{O}_{H(x_0,y_0)}\left(\mathrm{X}\right)\ \exists t_{H(x_0,y_0)}\in \mathrm{F}\left(\mathrm{V}_{H(x_0,y_0)}\right)\ \text{ tal que}$$

$$H\left(\mathrm{W}_{(x_0,y_0)}\right)\subset \mathrm{V}_{H(x_0,y_0)}\ \&\ \left(s\left(x,y\right)\right)_{(x,y)\in \mathrm{W}_{(x_0,y_0)}}=\left(t_{H(x_0,y_0)}\right)_{(x,y)\in \mathrm{W}_{(x_0,y_0)}}.$$

Por colagem da família $\left(t_{H(x,y)}\right)_{(x,y)\in[a,b]\times[0,1]}$ temos definida uma secção $\tau\in \mathrm{F}\left(\bigcup_{(x,y)\in[a,b]\times[0,1]} \mathrm{V}_{H(x,y)}\right)$ tal que $H^{-1}\tau=\left(s\left(x,y\right)\right)_{(x,y)\in[a,b]\times[0,1]}$.

Suponhamos agora que $H$ é uma homotopia que deforma $\alpha$ em $\beta$. O diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F}_{H(a,0)} \arrow[r, "a_{(a,0)}"] \arrow[d, equal] & \left(H^{-1}\mathrm{F}\right)_{(a,0)} \arrow[r, "\tilde{\varphi}_{H_0}"] & \left(H^{-1}\mathrm{F}\right)_{(b,0)} \arrow[r, "a_{(b,0)}^{-1}"] & \mathrm{F}_{H(b,0)} \arrow[d, equal] \\
\mathrm{F}_{H(a,1)} \arrow[r, "a_{(a,1)}"'] & \left(H^{-1}\mathrm{F}\right)_{(a,1)} \arrow[r, "\tilde{\varphi}_{H_1}"'] & \left(H^{-1}\mathrm{F}\right)_{(b,1)} \arrow[r, "a_{(b,1)}^{-1}"'] & \mathrm{F}_{H(b,1)}
\end{tikzcd}$$

é comutativo pois dado $\sigma_{H(a,0)} \left(= \sigma_{H(a,0)}\right) \in \mathrm{F}_{H(a,0)}$ temos

- $$\begin{aligned}
a_{(b,0)}^{-1} \circ \tilde{\varphi}_{H_0} \circ a_{(a,0)} \left(\sigma_{H(a,0)}\right) &= a_{(b,0)}^{-1} \circ \tilde{\varphi}_{H_0} \left(H^{-1}\sigma_{H(a,0)}\right) \\
&= a_{(b,0)}^{-1} \circ \tilde{\varphi}_{H_0} \left(\sigma_{H(a,0)}\right) \\
&= a_{(b,0)}^{-1} \left(\tilde{s}_{(b,0)}\right) \\
&= a_{(b,0)}^{-1} \left(H^{-1}\tau_{(b,0)}\right) \\
&= \tau_{H(b,0)}
\end{aligned}$$

onde $\tilde{s} \in H^{-1}\mathrm{F}\left([a,b] \times [0,1]\right)$ é a única secção (pelo Lema 2.3.17) tal que $\tilde{s}_{(a,0)} = \sigma_{H(a,0)}$.

- $$\begin{aligned}
a_{(b,1)}^{-1} \circ \tilde{\varphi}_{H_1} \circ a_{(a,1)} \left(\sigma_{H(a,1)}\right) &= a_{(b,1)}^{-1} \circ \tilde{\varphi}_{H_1} \left(H^{-1}\sigma_{H(a,1)}\right) \\
&= a_{(b,1)}^{-1} \circ \tilde{\varphi}_{H_1} \left(\sigma_{H(a,1)}\right) \\
&= a_{(b,1)}^{-1} \left(\tilde{s}_{(b,1)}\right) \\
&= a_{(b,1)}^{-1} \left(H^{-1}\tau_{(b,1)}\right) \\
&= \tau_{H(b,1)}
\end{aligned}$$

donde temos a comutatividade do diagrama.

Seja $\begin{array}{rccl} j_0\colon [a,b] & \hookrightarrow & [a,b] \times [0,1] \\ x & \longmapsto & (x,0) \end{array}$ a aplicação inclusão.

Pela Observação 2.4.3 temos que $j_0^{-1}\tilde{s} \in j_0^{-1}\left(H^{-1}\mathrm{F}\right)\left([a,b]\right)$ e pelo Lema 2.3.17 $j_0^{-1}\tilde{s}$ é a secção que verifica $\left(j_0^{-1}\tilde{s}\right)_a = \sigma_{H(a,0)}$.

Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F}_{\alpha(a)} \arrow[r, "a_a"] \arrow[d, equal] & \left(\alpha^{-1}\mathrm{F}\right)_a \arrow[r, "\tilde{\varphi}_\alpha"] & \left(\alpha^{-1}\mathrm{F}\right)_b \arrow[r, "a_b^{-1}"] & \mathrm{F}_{\alpha(b)} \arrow[d, equal] \\
\mathrm{F}_{H(a,0)} \arrow[r, "a_{(a,0)}"'] & \left(H^{-1}\mathrm{F}\right)_{(a,0)} \arrow[r, "\tilde{\varphi}_{H_0}"'] & \left(H^{-1}\mathrm{F}\right)_{(b,0)} \arrow[r, "a_{(b,0)}^{-1}"'] & \mathrm{F}_{H(b,0)}
\end{tikzcd}$$

este é comutativo pois dado $\sigma_{H(a,0)}\left(=\sigma_{\alpha(a)}\right)$, temos

$$\begin{aligned}
a_b^{-1}\circ\tilde{\varphi}_\alpha\circ a_a\left(\sigma_{\alpha(a)}\right) &= a_b^{-1}\circ\tilde{\varphi}_\alpha\left(\alpha^{-1}\sigma_a\right) \\
&= a_b^{-1}\circ\tilde{\varphi}_\alpha\left(\sigma_{\alpha(a)}\right) \\
&= a_b^{-1}\left(j_0^{-1}\tilde{s}_b\right) \\
&= a_b^{-1}\left(j_0^{-1}\left(H^{-1}\tau\right)_b\right) \\
&= a_b^{-1}\left(\alpha^{-1}\tau_b\right) \\
&= \tau_{\alpha(b)} \\
&= \tau_{H(b,0)} \\
&= a_{(b,0)}^{-1}\circ\tilde{\varphi}_{H_0}\circ a_{(a,0)}\left(\sigma_{H(a,0)}\right)
\end{aligned}$$

de igual forma mostramos que $a_b^{-1}\circ\tilde{\varphi}_\beta\circ a_a = a_{(b,1)}^{-1}\circ\tilde{\varphi}_{H_1}\circ a_{(a,1)}$. Consequentemente $\varphi_\alpha = \varphi_\beta$. $\square$

**Teorema 2.6.16** *Seja* X *um espaço topológico conexo localmente conexo por arcos e simplesmente conexo. Então todo o feixe* F *localmente constante sobre* X *é constante.*

**Demonstração:** Dado que X é simplesmente conexo pela Proposição 2.6.15 temos que todas as fibras são isomorfas a $\mathrm{A}^d$ para algum $d \in \mathbb{N}_0$.

Sejam U,V abertos conexos de X tais que $\mathrm{V}\subset\mathrm{U}$, $(\mathrm{U}_i)_{i\in I}$ uma cobertura aberta de U por abertos conexos tais que $\mathrm{V}\cap\mathrm{U}_i$, $\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j$ são abertos conexos e $\mathrm{F}|_{\mathrm{U}_i}\simeq\underline{\mathrm{A}}^d_{\mathrm{U}_i}$.

Introduzamos uma boa ordem em I por forma a que para qualquer $i\in I$, $i>k$ existe $j<i$ tal que $\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j\neq\varnothing$, onde $k$ é o mínimo de $I$ e para o qual $\mathrm{U}_k\subset\mathrm{V}$. Tal é possível pois U é conexo. Dados $i_0$, $i_1\in I$ tais que $\mathrm{U}_{i_0}\cap\mathrm{U}_{i_1}\neq\varnothing$, $\mathrm{U}_{i_0}\subset\mathrm{V}$ e $s_{i_0}\in\mathrm{F}\left(\mathrm{U}_{i_0}\right)$ temos que existe um e um só $s_{i_1}\in\mathrm{F}\left(\mathrm{U}_{i_1}\right)$ tal que $s_{i_0}|_{\mathrm{U}_{i_0}\cap\mathrm{U}_{i_1}} = s_{i_1}|_{\mathrm{U}_{i_0}\cap\mathrm{U}_{i_1}}$, pois $\mathrm{F}|_{\mathrm{U}_{i_1}}$ é um feixe constante e $\mathrm{U}_{i_0}\cap\mathrm{U}_{i_1}$, $\mathrm{U}_{i_1}$ são abertos conexos, pelo que podemos colar as duas secções.

Dada uma secção $s\in\mathrm{F}(\mathrm{V})$ $s|_{\mathrm{U}_k}\in\mathrm{F}(\mathrm{U}_k)$, por indução nos elementos de $I$ existe um e um só $\sigma\in\mathrm{F}(\mathrm{U})$ tal que $\sigma|_{\mathrm{V}}=s$, logo $\rho_{\mathrm{VU}}\colon\mathrm{F}(\mathrm{U})\to\mathrm{F}(\mathrm{V})$ é um isomorfismo, pelo Lema 2.3.17 temos então que F é um feixe constante.

$\square$

**Corolário 2.6.17** *Sejam* X *um espaço topológico localmente simplesmente conexo e* $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ $\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}}$ *-módulos então:*

$$\mathcal{H}om_{\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}}}(\mathcal{F},\mathcal{G})|_{\mathrm{U}} \simeq \mathcal{H}om_{\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U})}(\mathcal{F}(\mathrm{U}),\mathcal{G}(\mathrm{U}))$$

*onde* U *é um aberto conexo de* X.

**Demonstração:** Consideremos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \chi\colon \mathcal{H}om_{\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}}}(\mathcal{F},\mathcal{G})|_{\mathrm{U}} &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathcal{F}(\mathrm{U}),\mathcal{G}(\mathrm{U})), \\ \varphi\colon \mathcal{F}|_{\mathrm{U}} \to \mathcal{G}|_{\mathrm{U}} &\longmapsto \varphi(\mathrm{U})\colon \mathcal{F}(\mathrm{U}) \to \mathcal{G}(\mathrm{U}) \end{aligned}$$

sejam $\alpha\colon \mathcal{F}(\mathrm{U}) \to \mathcal{G}(\mathrm{U}) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathcal{F}(\mathrm{U}),\mathcal{G}(\mathrm{U}))$ e $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$. Decomponhamos V numa família de abertos simplesmente conexos $(\mathrm{V}_i)_{i\in I}$, consideremos então o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(\mathrm{U}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{\mathrm{V}_i,\mathrm{U}}"', "\wr"] & \mathcal{G}(\mathrm{U}) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{\mathrm{V}_i,\mathrm{U}}", "\wr"'] \\ \mathcal{F}(\mathrm{V}_i) \arrow[r, "\alpha_{\mathrm{V}_i}"'] & \mathcal{G}(\mathrm{V}_i) \end{tikzcd}$$

onde $\alpha_{\mathrm{V}_i}\colon \mathcal{F}(\mathrm{V}_i) \to \mathcal{G}(\mathrm{V}_i)$ é o único morfismo que torna o diagrama anterior comutativo pois pelo Lema 2.6.16 $\rho^{\mathcal{F}}_{\mathrm{V}_i,\mathrm{V}}$, $\rho^{\mathcal{G}}_{\mathrm{V}_i,\mathrm{V}}$ são isomorfismos. Consideremos então a seguinte família de diagramas:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(\mathrm{V}) \arrow[r, "\alpha_{\mathrm{V}}", "s \longmapsto \sigma"'] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{\mathrm{V}_i,\mathrm{V}}"'] & \mathcal{G}(\mathrm{V}) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{\mathrm{V}_i,\mathrm{V}}"] \\ \mathcal{F}(\mathrm{V}_i) \arrow[r, "\alpha_{\mathrm{V}_i}"'] & \mathcal{G}(\mathrm{V}_i) \end{tikzcd}$$

onde $\sigma$ é a colagem da família $(\alpha_{\mathrm{V}_i}(s|_{\mathrm{V}_i}))_{i\in I}$ , a qual existe e é única. Consequentemente existe um e um só morfismo $\alpha_{\mathrm{V}}$ que torna a família anterior de diagramas comutativa, logo $\chi$ é uma bijecção pelo que

$$\mathcal{H}om_{\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}}}(\mathcal{F},\mathcal{G})|_{\mathrm{U}} \simeq \mathcal{H}om_{\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U})}(\mathcal{F}(\mathrm{U}),\mathcal{G}(\mathrm{U})).$$

$\square$

**Corolário 2.6.18** *Sejam* $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ $\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}}$ *-módulos sobre um espaço topológico* X *conexo por arcos e localmente simplesmente conexo. Sejam* $x_0 \in \mathrm{X}$ *e* $\varphi_{x_0}\colon \mathcal{F}_{x_0} \to \mathcal{G}_{x_0}$ *um morfismo* A *-linear, então existe um e um só homomorfismo* $\underline{\mathrm{A}}_{\mathrm{X}}$ *-linear* $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *cujo o limite indutivo em* $x_0$ *é* $\varphi_{x_0}$.

**Demonstração:** Consequência imediata do Corolário 2.6.17 e do Lema 2.3.17 □

**Definição 2.6.19** *Seja* E *um feixe localmente constante sombre um espaço topológico* X *e* $\gamma\colon [0,1] \to \mathrm{X}$ *um lacete com* $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. *Sejam* $r_0$, $r_1$ *os morfismos definidos em* $\gamma^{-1}\mathrm{E}([0,1])$ *com valores em* $(\gamma^{-1}\mathrm{E})_0$ *e* $(\gamma^{-1}\mathrm{E})_1$ *respectivamente. Chamamos* ***monodromia*** *de* E *ao longo de* $\gamma$ *ao isomorfismo*

$$T_\gamma\colon \mathrm{E}_x \longrightarrow (\gamma^{-1}\mathrm{E})_0 \xrightarrow{r_0^{-1}} \gamma^{-1}\mathrm{E}([0,1]) \xrightarrow{r_1} (\gamma^{-1}\mathrm{E})_1 \longrightarrow \mathrm{E}_x.$$

A Proposição 2.6.15 mostra que este morfismo só depende da classe de homotopia de $\gamma$, pelo que o denotaremos por $T_{[\gamma]}$.

Fixemos um espaço topológico X, $x \in \mathrm{X}$, e um feixe localmente constante E sobre X. Associemos a cada $\gamma \in \pi_1(\mathrm{X}, x)$ o automorfismo $T_{[\gamma]}$ de $\mathrm{E}_x$ definido pela monodromia de E ao longo de $\gamma$.

**Definição 2.6.20** *Seja* A *um anel ,* E *um* A *-módulo e* G *um grupo. Chamamos* ***representação*** *de* G *em* E *a um morfismo de grupos* $\varphi$ *de* G *para o grupo dos automorfismos* A *-lineares de* E.

**Definição 2.6.21** *Dadas representações* $\varphi\colon \mathrm{G} \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E})$, $\psi\colon \mathrm{G} \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{A}}(\mathrm{F})$, *chama-se morfismo de* $\varphi$ *em* $\psi$ *a uma aplicação* A *-linear* $u\colon \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *tal que o diagrama abaixo comuta para qualquer* $\gamma$ *em* G.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\varphi(\gamma)"'] & \mathrm{F} \arrow[d, "\psi(\gamma)"] \\ \mathrm{E} \arrow[r, "u"'] & \mathrm{F} \end{tikzcd}$$

Definimos assim a categoria das representações de um grupo G na categoria dos A-módulos.

**Lema 2.6.22** *Sejam* E, F *feixes localmente constantes sobre* X, $u\colon \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *um morfismo de feixes e* $u_x\colon \mathrm{E}_x \to \mathrm{F}_x$ *o respectivo limite indutivo. Se* $[\gamma] \in \pi_1(\mathrm{X}, x)$, *então o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E}_x \arrow[r, "u_x"] \arrow[d, "T^{\mathrm{E}}_{[\gamma]}"'] & \mathrm{F}_x \arrow[d, "T^{\mathrm{F}}_{[\gamma]}"] \\ \mathrm{E}_x \arrow[r, "u_x"'] & \mathrm{F}_x \end{tikzcd} \qquad (*)$$

**Demonstração:** Dado que o limite indutivo está definido a menos de isomorfismo e tendo em conta a Proposição 2.4.4 temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E}_x \arrow[rr, "u_x"] \arrow[d, equal] & & \mathrm{F}_x \arrow[d, equal] \\ (\gamma^{-1}\mathrm{E})_0 \arrow[d, "r_0^{-1}"', "\wr"] & \text{①} & (\gamma^{-1}\mathrm{F})_0 \arrow[d, "r_0^{-1}", "\wr"'] \\ \gamma^{-1}\mathrm{E}([0,1]) \arrow[rr, "\gamma^{-1}u([0,1])"] \arrow[d, "r_1"', "\wr"] & & \gamma^{-1}\mathrm{F}([0,1]) \arrow[d, "r_1", "\wr"'] \\ (\gamma^{-1}\mathrm{E})_1 \arrow[d, equal] & \text{②} & (\gamma^{-1}\mathrm{F})_1 \arrow[d, equal] \\ \mathrm{E}_x \arrow[rr, "u_x"'] & & \mathrm{F}_x \end{tikzcd}$$

por definição de limite indutivo de um morfismo e pelo Lema 2.4.2 temos que os quadrados ① e ② são comutativos, pelo que o diagrama $(*)$ é comutativo.

□

Fixemos um anel A, um espaço topológico X e $x \in X$. Temos então um functor "Monodromia" da categoria dos A -módulos localmente constantes, de rank $n$, sobre X, para a categoria das representações de $\pi_1(\mathrm{X}, x)$ em $\mathrm{GL}(n, \mathrm{A})$.

Podemos definir um functor da categoria dos sistemas locais de rank $n$ sobre um espaço topológico X para a categoria das representações de $\pi_1(\mathrm{X}, x)$ em $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{E} & \longmapsto & T\colon \pi_1(\mathrm{X},x) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \\
 & & [\gamma] \mapsto T_{[\gamma]} \\
 & & \\
\mathrm{E} \xrightarrow{u} \mathrm{F} & \longmapsto & \mathrm{E}_x \xrightarrow{u_x} \mathrm{F}_x.
\end{array}
$$

**Definição 2.6.23** *Ao functor atrás definido chamamos* ***functor monodromia****.*

**Teorema 2.6.24** *Se todo o elemento de* X *admite uma vizinhança simplesmente conexa, então o functor monodromia é uma equivalência de categorias.*

**Demonstração:**
- **Fidelidade e plenitude**: Consequência imediata do Corolário 2.6.18.

- **Isomorficamente denso**: Seja $(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{x_0})$ um revestimento universal de $(\mathrm{X}, x_0)$. Relembremos que (cf. Corolário A.0.11) $\pi_1(\mathrm{X}, x_0)$ opera sobre $\tilde{\mathrm{X}}$: se $\tilde{\gamma}$ é o levantamento de um lacete $\gamma$ com origem em $\tilde{x_0}$, existe um único automorfismo $h_{[\gamma]}$ do revestimento $\tilde{\mathrm{X}}$ tal que $h_{[\gamma]}(\tilde{x_0}) = \tilde{\gamma}(1)$. Denotemos por $\tilde{F}$ o quociente de $\tilde{\mathrm{X}} \times \mathrm{F}_{x_0}$ pela relação de equivalência $(\tilde{x}, s_{x_0}) \sim (h_{[\gamma]}^{-1}(\tilde{x}), T_{[\gamma]}(s_{x_0}))$, $[\gamma] \in \pi_1(\mathrm{X}, x_0)$. Podemos construir então a seguinte aplicacção:

$$
\begin{array}{rcl}
\pi\colon \tilde{\mathrm{F}} & \longrightarrow & \mathrm{X}. \\
(\tilde{x}, s_{x_0}) & \longmapsto & x
\end{array}
$$

É imediato que $\pi$ é um revestimento. Seja $\hat{\mathrm{F}}$ o feixe das secções de $\tilde{\mathrm{F}}$. Para verificar que a representação associada a $\hat{\mathrm{F}}$ é igual a $T$ tomemos a imagem inversa de $\hat{\mathrm{F}}$ por $\tilde{\gamma}$: a secção que vale $s_{x_0}$ em em $\tilde{x}_0$ vale também $s_{x_0}$ em $h_{[\gamma]}(\tilde{x}_0)$, identificando os pontos $(h_{[\gamma]}(\tilde{x}_0), s_{x_0})$ e $(\tilde{x}_0, T_{[\gamma]}(s_{x_0}))$ temos o resultado pretendido. □

## 2.7 Equações diferenciais no plano complexo

Classicamente trabalhamos com equações diferenciais lineares

$$y^{(n)} + a_1(z)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(z)y = 0 \tag{2.2}$$

de ordem $n$ com coeficientes meromorfos. O método standard para o seu estudo consiste em transforma-la num sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}z} = \mathbf{A}(z)Y \tag{2.3}$$

por intermédio da transformação:

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

onde $\mathbf{A}$ é a matriz $n \times n$ dada pela fórmula:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Seja $\mathcal{D}$ um domínio conexo em $\mathbb{P}^1$ e $\mathbf{A}$ uma matriz holomorfa em $\mathcal{D} \setminus \mathrm{D}$ onde $\mathrm{D}$ é um subconjunto discreto de $\mathcal{D}$, sendo $\mathbf{A}$ meromorfa nos pontos de $\mathrm{D}$. Os pontos de $\mathrm{D}$ onde $\mathbf{A}$ é singular são chamados os **pontos singulares** de $\mathbf{A}$. Dado qualquer ponto $z_0 \in \mathcal{D} \setminus \mathrm{D}$ e qualquer vector $Y_0 \in \mathbb{C}^n$ existe uma única solução $Y$ de 2.3 definida numa vizinhança de $z_0$ com $Y(z_0) = Y_0$. A linearidade de 2.3 implica que esta solução existe globalmente em qualquer sub-domínio $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D} \setminus \mathrm{D}$ contendo $z_0$, e consequentemente, pode ser extendida ao longo de qualquer caminho em $\mathcal{D} \setminus \mathrm{D}$.

A equação 2.3 também tem sentido quando $Y$ é uma matriz $n \times n$. Uma matriz $\mathbf{F}$ solução desse sistema diz-se uma **matriz fundamental** de 2.3. Se existir $z_0 \in \mathcal{D} \setminus \mathrm{D}$ e $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ forem $n \times 1$ vectores solução de 2.3 tais que $Y_1(z_0), \cdots, Y_n(z_0)$ formam uma base de $\mathbb{C}^n$, então a matriz $n \times n$

$$\mathbf{F} = (Y_1, \cdots, Y_n)$$

é uma matriz fundamental. A matriz $\mathbf{F}$, tipicamente, será multivaluada. O prolongamento analítico ao longo de um caminho fechado $\gamma$ de ponto base $z_0$ transforma o germe de matriz $\mathbf{F}$ em $z_0$ em $\mathbf{FM}(\gamma)$ em $z_0$, onde $\mathbf{M}(\gamma) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. A matriz $\mathbf{M}(\gamma)$ depende apenas da classe de homotopia de $\gamma$, cf. Teorema da monodromia 2.6.10, e a relação óbvia

$$\mathbf{M}(\gamma\gamma') = \mathbf{M}(\gamma)\mathbf{M}(\gamma')$$

($\gamma\gamma'$ representa o caminho resultante de primeiro percorrermos o caminho $\gamma'$ e de seguida o caminho $\gamma$), mostra que $\mathbf{M}$ define uma **representação** do grupo fundamental

$$\pi_1(\mathcal{D} \setminus \mathrm{D}, z_0)$$

de $\mathcal{D} \setminus \mathrm{D}$ de ponto base $z_0$, chamada a **representação da monodromia** de 2.3, as classes de equivalência são independentes da escolha do germe de matriz $\mathbf{F}$ em $z_0$. O conjunto das matrizes $\mathbf{M}(\gamma)$ é, então, um subgrupo de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, chamado o **grupo de monodromia**. Se substituirmos $z_0$ por qualquer outro ponto $z_1$ de $\mathcal{D} \setminus \mathrm{D}$ as suas classes de conjugação permanecem invariantes. Notemos que $\mathbf{A}$ é univocamente determinado por $\mathbf{F}$ por intermédio da fórmula:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}z}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{A}. \tag{2.5}$$

Consideremos agora um ponto singular $x \in \mathrm{D}$ e $\Delta$ um disco contendo $x$, suficientemente pequeno por forma a que $\Delta \subset \mathrm{D}$ e $x$ seja o único ponto de D em $\Delta$. Seja $z$ um sistema de coordenadas em $x$. Se escolhermos $z_0 \in \Delta \setminus \{x\}$ e observarmos que $\pi_1(\Delta - \{x\}, z_0) \simeq \mathbb{Z}$, obtemos uma classe de conjugação $\Gamma$ em $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, a chamada classe de monodromia local em $x$. Se $\mathbf{F}$ é um germe de matriz fundamental em $z_0$ e $\gamma$ um lacete em $\Delta \setminus \{x\}$ de ponto base $z_0$ percorrido no sentido directo e que engloba o ponto $x$, então $\mathbf{F}$ é transformado em $\mathbf{Fm}$, $\mathbf{m} \in \Gamma$ quando percorremos o lacete $\gamma$. $\Gamma$ não depende da escolha de $\Delta$ ou de $z_0$. Se $\mathbf{C} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ é tal que

$$e^{2\pi i \mathbf{C}} = \mathbf{m} \tag{2.6}$$

então:

$$z^{\mathbf{C}} \stackrel{\text{def}}{=} e^{\log z \cdot \mathbf{C}}$$

muda da mesma forma que $\mathbf{F}$ quando fazemos o prolongamento analítico ao longo do lacete $\gamma$, pelo que

$$\mathbf{g}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}(z) \cdot (z^{\mathbf{C}})^{-1}$$

será uma aplicação em $\Delta \setminus \{x\}$.

Diremos que $x$ é um ponto **singular regular** se uma das afirmações seguintes, que são equivalentes, é satisfeita:

(i) $\mathbf{g}$ é de **crescimento moderado** em 0, i.e. $\mathbf{g}(z) = O(|z|^{-R})$ quando $z \to 0$ para algum $R \geq 0$.

(ii) $\mathbf{F}$ é de crescimento moderado em $x$.

(iii) $\mathbf{F} = \mathbf{g}(z)z^{\mathbf{C}}$ onde $\mathbf{g}$ é meromorfa em 0.

Em particular $e^{2\pi i \mathbf{C}}$ é a matriz de monodromia local.

**Definição 2.7.1** *O sistema 2.3 diz-se* ***singular regular*** *se cada um dos pontos for singular regular.*

Comecemos por supor que $x$ é um ponto singular regular. Na vizinhança de $z = 0$ uma matriz fundamental $\mathbf{F}$ é da forma $\mathbf{F}(z) = \mathbf{g}(z)z^{\mathbf{C}}$ onde $\mathbf{g}$ é meromorfa em 0 e $\mathbf{C}$ está na forma canónica de Jordan, pelo que as entradas de $\mathbf{F}$ são combinações lineares de funções da forma

$$z^{\lambda}(\log z)^{\tau} \sum_{n \geq 0} c_n z^n$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$, $\tau \in \mathbb{N}_0$ e a série de potências tem raio de convergência positivo.

**Teorema 2.7.2 (Fuchs)** *A equação 2.3 é singular regular se e só se as funções $a_i$ são meromorfas sobre $\mathcal{D}$ e a ordem do polo de $a_i$ em cada ponto de* D *é menor ou igual a $i$.*

Demonstrações detalhadas deste Teorema podem ser encontradas em [15] pag. 65, ou [20] pag. 107.

**Definição 2.7.3** *Os sistemas*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}U &= \mathbf{A}U \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}V &= \mathbf{B}V \end{aligned}$$

*dizem-se* ***equivalentes*** *se existe uma matriz $\mathbf{P} \in M_{n\times n}(\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(*\mathrm{D}))$ tal que $U = \mathbf{P}V$ e as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ verificam a relação (análoga à da equação 2.10):*

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathbf{P}. \tag{2.7}$$

**Teorema 2.7.4 (Fuchs)** *São equivalentes:*
*(i) O sistema 2.3 é equivalente a um sistema*

$$z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}V(z) = \mathbf{B}(z)V(z),$$

*onde $\mathbf{B}(z) \in M_{n\times n}(\mathcal{O}(\mathcal{D}))$.*

*(ii) O sistema 2.3 é equivalente a um sistema da forma*

$$z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}V(z) = \Gamma V(z),$$

*onde* $\Gamma \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.
*(iii) O sistema 2.3 é singular regular.*

Uma Demonstração detalhada deste Teorema podem ser encontrada em [15] pag. 66,

Vamos agora dar um processo de calcular a monodromia de um sistema regular da forma

$$z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}V(z) = \mathbf{B}V(z), \tag{2.8}$$

com $\mathbf{B}(z) \in M_{n\times n}(\mathcal{O}(\mathcal{D}))$. A ideia consiste em determinar uma matriz $\Gamma \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que o sistema 2.8 seja equivalente a

$$z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}V(z) = \Gamma V(z).$$

Notemos que o cálculo da monodromia local de um sistema corresponde ao cálculo da monodromia do seguinte feixe:

$$\ker\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} - \frac{1}{z}\mathbf{B}(z)\colon (\mathcal{O}_\Delta(*\{x\}))^n \longrightarrow (\mathcal{O}_\Delta(*\{x\}))^n\right]$$

o qual é um feixe localmente constante em $\Delta \setminus \{x\}$. Esta escrita permite ver que a monodromia, tal como é dada na equação 2.5, não depende do sistema de coordenadas.

**Teorema 2.7.5** *Se os valores próprios de* $\mathbf{B}(0)$ *não diferirem por um inteiro não nulo, então 2.8 é equivalente a:*

$$z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}V(z) = \mathbf{B}(0)V(z).$$

Uma demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [15] pag. 70.

Vamos mostrar que mesmo no caso em que a matriz $\mathbf{B}(0)$ não satisfaz as condições do Teorema 2.7.5, podemos reduzir-nos sempre a esse caso usando o método que vamos passar a descrever:

-Consideremos o sistema

$$z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}V(z) = \mathbf{B}(z)V(z).$$

Usando o Teorema de Jordan podemos supor que

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}(z) & \mathbf{F}(z) \\ \mathbf{G}(z) & \mathbf{D}(z) \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{C}(z) \in M_{p\times p}(\mathcal{O}(\Delta))$, $\mathbf{D}(z) \in M_{q\times q}(\mathcal{O}(\Delta))$, $\mathbf{F}(0) = 0$, $\mathbf{G}(0) = 0$ e $\mathbf{C}(0)$ tem um único valor próprio $\lambda$, distinto dos valores próprios de $\mathbf{D}(0)$.
Fazendo uma mudança de variável:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{z}\mathbf{1}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_q \end{bmatrix} V(z),$$

usando a equação 2.7 obtemos um sistema $z\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}(z) = \tilde{\mathbf{B}}(z)V(z)$, onde

$$\tilde{\mathbf{B}}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}(z) - \mathbf{1}_p & \frac{1}{z}\mathbf{F}(z) \\ z\mathbf{G}(z) & \mathbf{D}(z) \end{bmatrix}.$$

Como tal

$$\tilde{\mathbf{B}}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}(0) - \mathbf{1}_p & \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}(0) \end{bmatrix}$$

tem valores próprios $\lambda - 1, \lambda_1, \cdots, \lambda_k$, onde $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ são valores próprios de $\mathbf{D}(0)$. Agora é uma questão de utilizarmos recursivamente o processo até que não hajam valores próprios que difiram por um inteiro não nulo.

## 2.8 Conexões holomorfas

Para simplificar, ao longo desta secção iremos supor que X é uma superfície de Riemann.

### 2.8.1 Fibrados vectoriais holomorfos

Seja $\pi\colon \mathrm{E} \to \mathrm{X}$ uma aplicação holomorfa entre duas variedades analíticas complexas. Dizemos que $(\mathrm{E}, \pi)$ é um **fibrado vectorial de rank $d$ sobre** X se existe uma cobertura aberta $\mathfrak{U}$ de X ( dita **cobertura trivializante** de X) tal que para qualquer aberto U de $\mathfrak{U}$ existe uma carta biholomorfa $\varphi_{\mathrm{U}}$ que torna o diagrama abaixo comutativo

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(\mathrm{U}) \arrow[rr, "\varphi_{\mathrm{U}}", "\sim"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathrm{U} \times \mathbb{C}^d \arrow[dl, "p_1"] \\
& \mathrm{U} &
\end{tikzcd}$$

($p_1$ designa a primeira projecção) e que satisfaz a propriedade de lineariedade: para qualquer par $(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ de abertos da cobertura a mudança de cartas $\varphi_{\mathrm{V}} \circ \varphi_{\mathrm{U}}^{-1} \colon (\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) \times \mathbb{C}^d \to (\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) \times \mathbb{C}^d$ é linear nas fibras, i.e.

$$\forall x \in \mathrm{U} \cap \mathrm{V} \quad \varphi_{\mathrm{V}} \circ \varphi_{\mathrm{U}}^{-1}|_{\{x\} \times \mathbb{C}^d} \colon \ \{x\} \times \mathbb{C}^d \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{C}^d$$

é linear.

Um **morfismo** $\varphi$ entre dois fibrados E e E' sobre X é uma aplicação holomorfa de E em E' que torna o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{E} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathrm{E}' \arrow[dl, "\pi'"] \\
& \mathrm{X} &
\end{tikzcd}$$

e induz para qualquer $x \in \mathrm{X}$ uma aplicação linear $\varphi_x \colon \mathrm{E}_x \to \mathrm{E}'_x$ onde $\mathrm{E}_x = \pi^{-1}(x)$.

### 2.8.2 $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ – módulos localmente livres

Seja E um fibrado sobre X e U um aberto de X. Uma **secção holomorfa** de E sobre U é uma aplicação holomorfa $\sigma \colon \mathrm{U} \to \mathrm{E}$ que é uma secção da projecção $\pi$, i.e. que satisfaz $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_{\mathrm{U}}$. O conjunto $\mathcal{E}(\mathrm{U})$ das secções holomorfas é um módulo sobre $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U})$. As aplicações naturais de restrição aos abertos permitem definir um pré-feixe $\mathcal{E}$ sobre X que de facto é um feixe de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ – módulos. Dado que E é localmente isomorfo a um fibrado trivial, ou seja é isomorfo a $\mathcal{O}_{\mathrm{U}}^d$, temos que $\mathcal{E}$ é um feixe localmente livre de rank $d$ sobre $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$.

Vamos denotar por $\Theta_{\mathrm{X}}$ e $\Omega_{\mathrm{X}}^1$ os feixes associados aos fibrados $\pi_{\mathrm{X}} \colon \mathrm{TM} \to \mathrm{M}$, $\tau_{\mathrm{X}} \colon \mathrm{TM}^* \to \mathrm{M}$ respectivamente.

Podemos definir um functor da categoria dos fibrados vectoriais (os morfismos são os morfismos de fibrados vectoriais) na categoria dos feixes de

$\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ – módulos localmente livres (um morfismo de fibrados dá origem a um morfismo de feixes, por composição com as secções locais).

**Proposição 2.8.1 (Equivalência fibrados-feixes localmente livres)**
*O functor assim definido é uma equivalência entre a categoria dos fibrados holomorfos de rank $d$ e a dos feixes de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ – módulos localmente livres de rank $d$.*

**Demonstração:**
• **O functor é fiel**: Seja $f\colon \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ um morfismo de fibrados tal que o morfismo de feixes $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ induzido por este é nulo. Sejam $x \in \mathrm{X}$ e U um aberto de X trivializante para E e E', i.e. $\mathrm{E}|_{\mathrm{U}} \simeq \mathrm{U} \times \mathbb{C}^d$ e $\mathrm{E}'|_{\mathrm{U}} \simeq \mathrm{U} \times \mathbb{C}^{d'}$. Para qualquer secção $\sigma\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U} \times \mathbb{C}^d$, a composta $f \circ \sigma\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U} \times \mathbb{C}^{d'}$ é nula. Consequentemente a imagem por $f(x)$ de cada vector da base canónica de $\mathbb{C}^d$ é nula, logo $f(x)\colon \mathrm{E}_x \to \mathrm{E}'_x$ é a aplicação linear nula.

• **O functor é pleno**: Vamos começar por supor que E e E' são trivializáveis, logo $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ são livres ($\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{X}}^d$ e $\mathcal{E}' \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{X}}^{d'}$). Um morfismo $\varphi\colon \mathcal{O}_{\mathrm{X}}^d \to \mathcal{O}_{\mathrm{X}}^{d'}$ exprime-se por uma matriz$(\varphi_{ij})$ de $d \times d'$ tomando as bases canónicas correspondentes, onde $\varphi_{ij}\colon \mathcal{O}_{\mathrm{X}} \to \mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ é um morfismo de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ – módulos livres. O feixe $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ admite uma secção canónica -a secção unidade 1 e $\varphi_{ij}(1)$ é uma secção holomorfa sobre X. Reciprocamente, por lineariedade, é claro que $\varphi_{ij}(1)$ determina $\varphi_{ij}$ completamente. Consequentemente dar a matriz $(\varphi_{ij}(1))$ é equivalente a dar $\varphi$. Esta matriz define um morfismo entre fibrados triviais

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{X} \times \mathbb{C}^d & \longrightarrow & \mathrm{X} \times \mathbb{C}^{d'}. \\ (x, v) & \longmapsto & (x, \varphi_{ij}(1)(x).v) \end{array}$$

No caso geral $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ são localmente livres. Se $\varphi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ é um morfismo de feixes, construimos um morfismo de fibrados $\mathrm{E}|_{\mathrm{U}} \to \mathrm{E}'|_{\mathrm{U}}$ tomando a restrição a qualquer aberto trivializante. A fidelidade mostra que podemos colar estes morfismos num morfismo de $\mathrm{E} \to \mathrm{E}'$.

• **O functor é isomorficamente denso**: Seja $\mathfrak{U}$ uma cobertura aberta de X e U um aberto de $\mathfrak{U}$ tal que $\mathcal{E}|_{\mathrm{U}} \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{U}}^d \simeq \mathcal{S}(\mathrm{U} \times \mathbb{C}^d)$ (o feixe das secções do fibrado $\mathrm{U} \times \mathbb{C}^d$), designemos por $\varphi_{\mathrm{U}}$ tal isomorfismo. Tomando dois abertos U, V nas condições anteriores temos que $\varphi_{\mathrm{V}}|_{\mathrm{U}\cap\mathrm{V}} \circ \varphi_{\mathrm{U}}|_{\mathrm{U}\cap\mathrm{V}}^{-1} : \mathcal{S}(\mathrm{U} \times \mathbb{C}^d) \to \mathcal{S}(\mathrm{U} \times \mathbb{C}^d)$ é um isomorfismo, consequentemente pela fidelidade e plenitude temos que existe um isomorfismo de fibrados $\mathrm{U} \times \mathbb{C}^d|_{\mathrm{U}\cap\mathrm{V}} \to \mathrm{U} \times \mathbb{C}^d|_{\mathrm{U}\cap\mathrm{V}}$, logo podemos fazer a colagem dos fibrados por forma a obtermos um fibrado F sobre X. Como $\mathcal{E}|_{\mathrm{U}} \simeq \mathcal{S}(\mathrm{F})|_{\mathrm{U}}$ para a cobertura $\mathfrak{U}$, pela Proposição 2.3.7 $\mathcal{E} \simeq \mathcal{S}(\mathrm{F})$. □

**Definição 2.8.2** *Uma* ***conexão holomorfa*** $\nabla$ *sobre um fibrado vectorial* $\pi\colon \mathrm{E} \to \mathrm{X}$ *é um homomorfismo* $\mathbb{C}_{\mathrm{X}}$ *− linear de feixes*

$$\nabla\colon \mathcal{E} \longrightarrow \Omega^1_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathcal{E}$$

*satisfazendo a regra de Leibnitz: para qualquer aberto* U *de* X, *qualquer função holomorfa* $f \in \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U})$ *e qualquer* $s \in \mathcal{E}(\mathrm{U})$ *temos definida a igualdade ("regra de Leibnitz")*

$$\nabla(f.s) = f\nabla(s) + \mathrm{d}f \otimes s \in \Omega^1_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathcal{E}(\mathrm{U}).$$

**Definição 2.8.3** *Dado um feixe* $\mathcal{E}$ *de rank* $d$ *sobre* X *e* $\mathrm{U} \subset \mathrm{X}$ *um aberto, dizemos que* U *é um* ***aberto trivializante*** *se* $\mathcal{E}|_{\mathrm{U}} \simeq \mathcal{O}^d_{\mathrm{U}}$.

### 2.8.3 Expressão local da conexão

Seja U um aberto trivializante de $\mathcal{E}$ e $\mathbf{e} = (e_1, \cdots, e_d)$ uma base de $\mathcal{E}(\mathrm{U})$, i.e. qualquer secção holomorfa $s \in \mathcal{E}(\mathrm{U})$ se escreve de forma única $\sum_{j=1}^d s_i e_j$ com $s_j \in \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U})$. Existe então uma matriz $\Omega = (\omega_{ij})$, de $d \times d$, de 1-formas holomorfas tal que temos a igualdade

$$\nabla(e_i) = \sum_{j=1}^d \omega_{ji} \otimes e_j.$$

Podemos escrever da forma matricial

$$\begin{pmatrix} \nabla(e_1) \\ \vdots \\ \nabla(e_d) \end{pmatrix} = {}^t\Omega \otimes \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix}$$

Dizemos que $\Omega$ é a **matriz da conexão** $\nabla$na base **e**. Se $s = \sum_i s_i e_i$ é uma secção holomorfa de $\mathcal{E}(\mathrm{U})$ temos

$$
\begin{aligned}
\nabla(s) &= \nabla\left((s_1,\cdots,s_d)\,.\begin{pmatrix} e_1\\ \vdots\\ e_d\end{pmatrix}\right)\\
&= (\mathrm{d}s_1,\cdots,\mathrm{d}s_d)\otimes\begin{pmatrix} e_1\\ \vdots\\ e_d\end{pmatrix}+(s_1,\cdots,s_d)\,.\nabla\begin{pmatrix} e_1\\ \vdots\\ e_d\end{pmatrix}\\
&= \big((\mathrm{d}s_1,\cdots,\mathrm{d}s_d)+(s_1,\cdots,s_d)\,.{}^t\Omega\big)\otimes\begin{pmatrix} e_1\\ \vdots\\ e_d\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Seja $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_d)$ uma outra base de $\mathcal{E}(\mathrm{U})$ e $\mathrm{P}\in\mathrm{GL}(d,\mathcal{O}_\mathrm{X})(\mathrm{U})$ a matriz mudança de base de $\mathbf{e}$ para $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_d)=(e_1\cdots,e_d).\mathrm{P},$$

então a matriz $\Omega'$ de $\nabla$ na base $\boldsymbol{\varepsilon}$ obtem-se a partir de $\Omega$ pela fórmula

$$\Omega'=\mathrm{P}^{-1}\Omega\mathrm{P}+\mathrm{P}^{-1}\mathrm{dP}.$$

**Definição 2.8.4** *Seja $\mathcal{E}$ um sistema local de rank $d$, uma* ***secção holomorfa $\nabla$ -horizontal*** *de $\mathcal{E}(\mathrm{U})$, $\mathrm{U}$ aberto de $\mathrm{X}$, é uma secção que satisfaz $\nabla(s)=0$, i.e. é uma secção sobre $\mathrm{U}$ do feixe*

$$\ker[\nabla\colon\mathcal{E}\longrightarrow\Omega^1_\mathrm{X}\otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}\mathcal{E}].$$

Se U for aberto trivializante e se as componentes de $s$ numa base local $\mathbf{e}$ de $\mathcal{E}(\mathrm{U})$ são $s_1\cdots,s_d$, a equação $\nabla(s)=0$ escreve-se

$$\begin{pmatrix}\mathrm{d}s_1\\ \vdots\\ \mathrm{d}s_d\end{pmatrix}+\Omega\begin{pmatrix}s_1\\ \vdots\\ s_d\end{pmatrix}=0$$

dado que X é uma superfície de Riemann $\Omega=\Omega^{(1)}\mathrm{d}z$, onde $\Omega^{(1)}\in\mathrm{M}(d,\mathcal{O}_\mathrm{X})$, podemos escrever

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\begin{pmatrix}s_1\\ \vdots\\ s_d\end{pmatrix}=-\Omega^{(1)}\begin{pmatrix}s_1\\ \vdots\\ s_d\end{pmatrix}. \qquad (*)$$

**Teorema 2.8.5 (Cauchy-Kowalevski)** *Seja* $\nabla\colon \mathcal{E} \to \Omega^1_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathbb{C}_{\mathrm{X}}} \mathcal{E}$ *uma conexão holomorfa sobre um fibrado vectorial* E *de rank* $d$, *i.e. é localmente isomorfo ao feixe localmente constante* $\mathbb{C}^d_{\mathrm{X}}$.
*(i) O feixe localmente constante* $\mathrm{E}^\nabla = \ker \nabla$ *é um feixe localmente constante de* $\mathbb{C}$ *-espaços vectoriais de rank d i.e. é localmente isomorfo ao feixe constante* $\mathbb{C}^d_{\mathrm{X}}$.
*(ii) O feixe* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathbb{C}_{\mathrm{X}}} \mathrm{E}^\nabla$ *é um feixe localmente livre de* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ *− módulos e a conexão definida por* $\nabla(f \otimes s) = \mathrm{d}f \otimes s$ *é tal que* $\left(\mathcal{O}_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathbb{C}_{\mathrm{X}}} \mathrm{E}^\nabla\right)^\nabla = \mathrm{E}^\nabla$.
*(iii) O homomorfismo natural* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathbb{C}_{\mathrm{X}}} \mathrm{E}^\nabla \to \mathcal{E}$ *é um isomorfismo de fibrados com conexão.*

**Demonstração:** (i) Como o enunciado é de natureza local podemos tomar uma carta local U de X na qual $\mathcal{E}$ é trivial. Seja $\Delta$ um disco de $\mathbb{C}$ centrado em 0. Pelo Teorema de existência e unicidade de solução das equações diferenciais ordinárias as soluções de (*) em $\Delta$ formam um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensão $d$, i.e. temos o seguinte isomorfismo de $\mathbb{C}$ -espaços vectoriais

$$\begin{array}{rcl} \Psi\colon \mathrm{E}^\nabla & \longrightarrow & \mathbb{C}^d \\ s & \longmapsto & s(0) \end{array}$$

(ou de forma análoga para qualquer $m \in \Delta$), consequentemente $\mathrm{E}^\nabla|_\Delta \simeq \mathbb{C}^d$.

(ii) Comecemos por mostrar que $\mathcal{O}_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathbb{C}_{\mathrm{X}}} \mathrm{E}^\nabla$ é um $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ -módulo localmente livre. O enunciado é de natureza local , logo podemos tomar uma carta local U de X na qual $\mathrm{E}^\nabla$ é trivial. Pela Proposição 2.3.10 $\mathcal{O}_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathbb{C}_{\mathrm{X}}} \mathrm{E}^\nabla|_{\mathrm{U}} \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{U}} \otimes_{\mathbb{C}_{\mathrm{U}}} \left(\mathrm{E}^\nabla|_{\mathrm{U}}\right)$, pois os pré-feixes são isomorfos.

Como $\mathrm{E}^\nabla|_{\mathrm{U}} \simeq \mathbb{C}|^d_{\mathrm{U}}$ temos que $\mathcal{O}_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathbb{C}_{\mathrm{X}}} \mathrm{E}^\nabla \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{U}} \otimes_{\mathbb{C}_{\mathrm{U}}} \left(\mathrm{E}^\nabla|_{\mathrm{U}}\right) \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{U}} \otimes_{\mathbb{C}_{\mathrm{U}}} \mathbb{C}|^d_{\mathrm{U}} \simeq \mathcal{O}^d_{\mathrm{U}}$, logo $\mathcal{O}_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathbb{C}_{\mathrm{X}}} \mathrm{E}^\nabla$ é um $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ -módulo localmente livre. Precisemos melhor a construção de $\nabla$. Por aplicação da Proposição 2.3.10 temos que o diagrama seguinte é comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U}) \otimes_{\mathbb{C}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U})} \mathrm{E}^\nabla(\mathrm{U}) \arrow[r, "\Psi(\mathrm{U})"] \arrow[d, "\theta(\mathrm{U})"'] & \mathcal{E}(\mathrm{U}) \\ \mathcal{O}_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathbb{C}_{\mathrm{X}}} \mathrm{E}^\nabla(\mathrm{U}) \arrow[ur, "\Psi^+(\mathrm{U})"'] & \end{tikzcd}$$

como $\Psi_x$ é um isomorfismo para qualquer $x \in \mathrm{X}$, pelas Proposições 2.3.10, 2.3.4 $\Psi^+$ é um isomorfismo de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ -módulos. Chamamos igualmente a atenção que

$$\mathrm{id} \otimes \Psi^+ \colon \Omega^1_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \left(\mathcal{O}_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathbb{C}_{\mathrm{X}}} \mathrm{E}^{\nabla}\right) \to \Omega^1_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathcal{E}$$

é um isomorfismo de feixes, pois é um isomorfismo de pré-feixes.

Na definição de $\nabla$ fizemos a identificação $\Omega^1_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \left(\mathcal{O}_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathbb{C}_{\mathrm{X}}} \mathrm{E}^{\nabla}\right) \simeq \Omega^1_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathcal{E}$ i.e. $\mathrm{id} \otimes \Psi^+ \circ \nabla(f \circ s) = \mathrm{d}f \otimes s$. Dado U um aberto trivializante de $\mathcal{E}^{\nabla}$ temos

$$\begin{aligned} \nabla(f \otimes s) = 0 \;&\Leftrightarrow\; \mathrm{d}f \otimes s = 0 \\ &\Leftrightarrow\; \mathrm{d}f = 0 \\ &\Leftrightarrow\; f \in \mathbb{C}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U}) \end{aligned}$$

logo $\ker \nabla = \mathbb{C}_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathbb{C}_{\mathrm{X}}} \mathrm{E}^{\nabla} \simeq \mathrm{E}^{\nabla}$, consequentemente $\left(\mathcal{O}_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathbb{C}_{\mathrm{X}}} \mathrm{E}^{\nabla}\right)^{\nabla} \simeq \mathrm{E}^{\nabla}$.

(iii) É uma consequência imediata de termos o seguinte diagrama comutativo de pré-feixes

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "\nabla"] & \Omega^1_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathcal{E} \\ \mathcal{O}_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathbb{C}_{\mathrm{X}}} \mathrm{E}^{\nabla} \arrow[u, "\Psi"] \arrow[r, "\nabla"'] & \Omega^1_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \left(\mathcal{O}_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathbb{C}_{\mathrm{X}}} \mathrm{E}^{\nabla}\right). \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \Psi"'] \end{tikzcd}$$

□

## 2.9 Conexões meromorfas

Ao longo desta secção vamos supor que X é uma superfície de Riemann.

### 2.9.1 Fibrados meromorfos

Seja X uma superfície de Riemann e $\Sigma \subset \mathrm{X}$ um subconjunto discreto. Associamos a cada aberto U de X o grupo abeliano $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(*\Sigma)(\mathrm{U})$. Este é o subgrupo das funções holomorfas $\varphi$ sobre $\mathrm{U} \setminus \Sigma$ tais que para qualquer carta V contida em U, onde $\Sigma \cap \mathrm{V}$ é definido pela anulação de uma coordenada local, i.e. $\Sigma \cap \mathrm{V} = \{z = 0\}$, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $z^n \varphi|_{\mathrm{V}}(z)$ é holomorfa em V. Tomando para $\rho$ a restrição habitual, o par $(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(*\Sigma), \rho)$ é um pré-feixe, a que chamamos o pré-feixe das funções meromorfas com polos ao longo de $\Sigma$. Na realidade este pré-feixe é um feixe que denotamos $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(*\Sigma)$. Tendo em conta a Proposição 2.8.1 faz sentido darmos a seguinte Definição:

**Definição 2.9.1** *Um* ***fibrado meromorfo sobre*** $X$ ***com polos ao longo de*** $\Sigma$ *é um feixe localmente livre de rank finito de* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(*\Sigma)$ *-módulos.*

**Definição 2.9.2** *Seja* $\mathcal{M}$ *um fibrado vectorial meromorfo com polos ao longo de* $\Sigma$*, uma* ***conexão meromorfa*** *sobre* $\mathcal{M}$ *é um homomorfismo* $\mathbb{C}_{\mathrm{X}}$ *-linear de feixes:*

$$\nabla\colon \mathcal{M} \longrightarrow \Omega^1_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathcal{M}$$

*satisfazendo a regra de Libnitz: para qualquer aberto de* $\mathrm{U}$ *de* $\mathrm{X}$*, qualquer função meromorfa* $f \in \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(*\Sigma)(\mathrm{U})$ *e qualquer* $s \in \mathcal{M}(\mathrm{U})$ *temos definida a igualdade ("regra de Leibnitz"):*

$$\nabla(f.s) = f\nabla(s) + \mathrm{d}f \otimes s \in \Omega^1_{\mathrm{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathcal{M}(\mathrm{U}).$$

Notemos que numa base local de $\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(*\Sigma)$, a matriz $\mathbf{\Omega}$ da conexão é de elementos em $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(*\Sigma) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \Omega^1_{\mathrm{X}} \overset{\mathrm{def}}{=} \Omega^1_{\mathrm{X}}(*\Sigma)$. Se X for uma superfície de Riemann, $x_0 \in \Sigma$ que sem perda de generalidade podemos considerar $x_0 = 0$, e $z$ um sistema de coordenadas numa vizinhança $\Delta$ de 0, então a conexão meromorfa admite a seguinte escrita local:

$$z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} - \mathbf{A}\colon (\mathcal{O}_\Delta(*\{0\}))^n \longrightarrow (\mathcal{O}_\Delta(*\{0\}))^n \tag{2.9}$$

onde $n$ é o rank de $\mathcal{M}$ e $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathcal{O}_\Delta(*\{x_0\}))$.

As considerações da secção 1.8.3 estendem-se ao caso meromorfo de maneira imediata, a matriz $\Omega'$ de $\nabla$ na nova base obtem-se a partir de $\Omega$ pela fórmula

$$\Omega' = \mathrm{P}^{-1}\Omega\mathrm{P} + \mathrm{P}^{-1}\mathrm{dP}, \tag{2.10}$$

notemos que a matriz $\mathbf{P}$ da dita secção pertence, neste caso, a $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(*\Sigma))(\mathrm{U})$.

### 2.9.2 A correspondência de Riemann-Hilbert

Se $\mathcal{M}$ é uma conexão meromorfa sobre um fibrado fixado com polos ao longo de $\Sigma$, então a restrição de $\mathcal{M}$ a $\mathrm{X}\setminus\Sigma$ é uma conexão holomorfa sobre $\mathrm{X}\setminus\Sigma$.

Suponhamos que $\Delta$ é um disco aberto do plano complexo com centro na origem. Seja $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$. O germe na origem de um fibrado vectorial meromorfo sobre $\Delta$, com polos na origem, é um espaço vectorial de dimensão finita sobre o corpo K das séries de Laurent com polos de ordem finita.

Sejam $u_1, \cdots, u_n$ uma base de $\mathcal{M}_0$. Tomando a expressão local da conexão temos que existem $a_{ij} \in \mathrm{K}$ tais que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}u_i = \sum_j a_{ji}u_j. \tag{2.11}$$

Se escolhermos uma outra base obteremos um sistema equivalente.

**Definição 2.9.3** *Dizemos que uma conexão meromorfa é **singular regular** em* 0 *se o sistema 2.11 for singular regular.*

**Definição 2.9.4** *Dada uma superfície de Riemann* X *e um subconjunto discreto* $\Sigma$ *de* X, *diremos que uma connexão meromorfa* $\mathcal{M}$ *sobre* X, *com polos ao longo de* $\Sigma$, *é **singular regular** ao longo de* $\Sigma$ *se, dado* $x_0 \in \Sigma$, *existe uma carta* U *de* X *centrada em* $x_0$ *contendo um disco* $\Delta$ *centrado em* $x_0$, *tal que a restrição da conexão meromorfa* $\mathcal{M}$ *a* $\Delta$ *é singular regular em* $x_0$.

**Teorema 2.9.5** *Fixemos uma superfície de Riemann* X *e um subconjunto discreto* $\Sigma$ *de* X. *Dada uma conexão* $\mathcal{M}$ *sobre* $\mathrm{X} \setminus \Sigma$, *existe uma e uma só conexão meromorfa* $\tilde{\mathcal{M}}$ *sobre* X, *com polos ao longo de* $\Sigma$, *singular regular ao longo de* $\Sigma$, *cuja restrição a* $\mathrm{X} \setminus \Sigma$ *é isomorfa a* $\mathcal{M}$.

Seja $(\nabla, \mathrm{X}, \Sigma)$ a categoria das conexões meromorfas sobre X com polos em $\Sigma$, singulares regulares ao longo de $\Sigma$. Seja $\mathrm{Loc}(\mathrm{X} \setminus \Sigma)$ a categoria dos sistemas locais sobre $\mathrm{X} \setminus \Sigma$. Seja

$$RH\colon (\nabla, \mathrm{X}, \Sigma) \longrightarrow \mathrm{Loc}(\mathrm{X} \setminus \Sigma)$$

o functor que associa a uma conexão meromorfa sobre X, com polos ao longo de $\Sigma$, o feixe das secções horizontais da restrição a $\mathrm{X}\setminus\Sigma$ da conexão meromorfa $\mathcal{M}$.

**Corolário 2.9.6** *Fixemos uma superfície de Riemann* X *e um subconjunto discreto* $\Sigma$ *de* X. *O functor* $RH$ *é uma equivalência de categorias.*

Esta equivalência de categorias é normalmente conhecida por **correspondência de Riemann-Hilbert**.

**Demonstração:**(do Teorema 2.9.5)

Seja $\sigma \in \Sigma$, sem perda de generalidade podemos considerar que $\sigma = 0$. Seja $\Delta$ um disco centrado na origem por forma a que $\Sigma \cap \Delta = \{0\}$.

Comecemos pela existência. Seja $\mathcal{E}$ o sistema local das secções horizontais de $\mathcal{M}|_{\Delta\setminus\{0\}}$. Seja $\mathbf{M}$ a matriz da monodromia de $\mathcal{E}$, logo pertence a $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, e $\mathbf{A}$ uma matriz tal que $\mathbf{M} = e^{i2\pi\mathbf{A}}$. Podemos supor que o conjunto dos valores próprios de $\mathbf{A}$ não contem inteiros positivos, cf. o último resultado da secção 2.7. Consideremos então sistema de equações diferenciais

$$z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}u = \mathbf{A}u.$$

Pelo Teorema 2.6.24 sabemos que as suas soluções constituem um sistema local sobre $\Delta \setminus \{0\}$ isomorfo a $\mathcal{E}$.

Seja $\widetilde{\mathcal{M}}$ a conexão meromorfa:

$$z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} - \mathbf{A}\colon (\mathcal{O}_\Delta(*\{0\}))^n \longrightarrow (\mathcal{O}_\Delta(*\{0\}))^n$$

onde $n$ é o rank do sistema local $\mathcal{E}$. Pelas Definições 2.9.2, 2.9.3, 2.9.4 temos $\widetilde{\mathcal{M}}$ é uma conexão meromorfa sobre $\Delta$ com polos na origem, singular regular na origem. Como o sistema local das secções horizontais de $\widetilde{\mathcal{M}}|_{\Delta\setminus\{0\}}$ é isomorfo a $\mathcal{E}$, então pelo Teorema de Cauchy-Kowalevski 2.8.5 $\widetilde{\mathcal{M}}|_{\Delta\setminus\{0\}}$ é isomorfo a $\mathcal{M}|_{\Delta\setminus\{0\}}$.

Provemos agora a unicidade da extensão. Sejam $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ duas conexões meromorfas sobre um disco $\Delta$, com polos na origem, singulares regulares na origem e isomorfas fora da origem. Tomando o limite indutivo em 0 do morfismo 2.9 temos que a fibra M de $\mathcal{M}$ na origem é um espaço vectorial sobre o corpo K das séries de Laurent, sendo a sua dimensão o rank do sistema local $RH(\mathcal{M})$. Fixemos uma base $u = \{u_1, \cdots, u_n\}$ de M. Existe uma matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$, com coeficientes em K, tal que

$$z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}u_i = \sum_j a_{ij}u_j.$$

Pelo Teorema de Fuchs 2.7.4, após uma mudança de base, podemos supor que a matriz $\mathbf{A}$ é constante.

De forma análoga existe uma base $v = \{v_1 \cdots, v_n\}$ da fibra na origem de N, da conexão meromorfa $\mathcal{N}$ e uma matriz constante $\mathrm{B} = (b_{ij})$ tal que

$$z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}v_i = \sum_j b_{ij}v_j.$$

Como os feixes $RH(\mathcal{M})$, $RH(\mathcal{N})$ são isomorfos então

$$e^{i2\pi\mathbf{A}} = e^{i2\pi\mathbf{B}}.$$

Concluimos que, após uma nova mudança de base, podemos supor $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Como tal as conexões meromorfas $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ são isomorfas nalguma vizinhança da origem, pois existe um morfismo mudança de base da primeira para a segunda, cf. 2.10.

Suponhamos agora que X é uma superfície de Riemann. Associemos a cada $x \in \Sigma$ um disco $\Delta_x$ centrado em $x$ de tal forma que se $y \in \Sigma$ e $x \neq y$

então $\Delta_x \cap \Delta_y = \varnothing$. Consideremos em cada disco a conexão regular $\mathcal{M}_{(x)}$ que coincide com $\mathcal{M}$ fora de x. Colando os feixes $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_{(x)}$, $x \in \Sigma$, obtemos uma conexão meromorfa $\widetilde{\mathcal{M}}$ em X. $\square$

## 2.10 Cohomologia de feixes

**Definição 2.10.1** *Sejam* E, F *feixes sobre um espaço topológico* X *e* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *um morfismo de feixes. Dado* U *um aberto de* X, *denotamos por*
*i)* $\ker f$ *o feixe*

$$(\ker f)(\mathrm{U}) = \ker f_{\mathrm{U}}$$

*os morfismos de restrição são os induzidos pelos do feixe* E.
*ii)* $\mathrm{Im} f$ *o feixe associado ao pré-feixe*

$$(\mathrm{Im} f)(\mathrm{U}) = \mathrm{Im} f_{\mathrm{U}}$$

*os morfismos de restrição são os induzidos pelos do feixe* F.
*iii)* $\mathrm{coker} f$ *o feixe associado ao pré-feixe*

$$(\mathrm{coker} f)(\mathrm{U}) = \mathrm{coker} f_{\mathrm{U}}$$

*os morfismos de restrição são os induzidos pelos do pré-feixe* $\mathrm{coker} f$.

**Definição 2.10.2** *Dizemos que uma sucessão* $\mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{F} \xrightarrow{g} \mathrm{G}$ *é* ***exacta*** *se* $\mathrm{Im} f = \ker g$.

**Teorema 2.10.3** *A sucessão* $\mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{F} \xrightarrow{g} \mathrm{G}$ *é exacta se e só se para qualquer* $x \in \mathrm{X}$ *a sucessão é exacta:*

$$\mathrm{E}_x \xrightarrow{f_x} \mathrm{F}_x \xrightarrow{g_x} \mathrm{G}_x.$$

**Demonstração:**
$\Rightarrow$) Seja U um aberto de X e $x \in U$, considerando o pré-feixe $\mathrm{Im} f$ temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{E(U)} \arrow[r, "f_{\mathrm{U}}"] \arrow[d] & \mathrm{Im} f_{\mathrm{U}} \arrow[d] \\
\mathrm{E}_x \arrow[r, "f_x"'] & (\mathrm{Im} f)_x
\end{tikzcd}$$

logo $\mathrm{Im} f_x \subset (\mathrm{Im} f)_x$, pela comutatividade do diagrama para qualquer U que contenha $x$ temos que $\mathrm{Im} f_x = (\mathrm{Im} f)_x$. Pela Proposição 2.3.10 temos então que $\mathrm{Im} f_x = (\mathrm{Im} f)_x$, onde $\mathrm{Im} f$ é o feixe associado ao pré-feixe $\mathrm{Im} f$. De forma análoga mostramos que $(\ker g)_x = \ker g_x$.

Dado que $\mathrm{Im} f = \ker g$ então para qualquer $x \in \mathrm{X}$ temos a igualdade $\mathrm{Im} f_x = \ker g_x$.

$\Leftarrow$) Dado que para qualquer $x \in \mathrm{X}$ $g_x \circ f_x = 0$ e $0_x = 0$ onde 0 é o morfismo de feixes $0\colon \mathrm{E} \to \mathrm{G}$, temos que $g \circ f = 0$. Consequentemente em termos de pré--feixes temos que $\mathrm{Im} g \subset \ker f$. Pela Proposição 2.3.7 temos definido o morfismo inclusão $i\colon \mathrm{E} \to \mathrm{G}$, como $\mathrm{Im} f_x = \ker g_x$, então $i_x = \mathrm{id}_{\mathrm{Im} f_x}$, para qualquer $x \in \mathrm{X}$. Consequentemente $\mathrm{Im} f = \ker g$ pela Proposição 2.3.7. $\square$

### 2.10.1 Cohomologia de Čech

Vamos descrever sumariamente a construção da Cohomologia de Čech. Dada uma cobertura aberta $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X. Fixemos uma boa ordem no conjunto de índices $I$. Construimos um complexo com valores num feixe $\mathcal{F}$ como se segue:

1. $U_{i_0,\cdots,i_p} \stackrel{\text{def}}{=} U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}$ para qualquer $(p+1)$-sequência de índices e qualquer $p \geq 0$.

2. Dado um feixe $\mathcal{F}$ e $p \geq 0$ definimos
$$C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i_0 < \cdots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0,\cdots,i_p}).$$

3. Para qualquer $p \geq 0$ construimos o **morfismo de cobordo** da seguinte forma:
$$\begin{array}{rcl} d^p\colon C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \\ \alpha_{i_0,\cdots,i_p} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \alpha_{i_0,\cdots,\hat{i}_k,\cdots,i_{p+1}}|_{U_{i_0,\cdots,i_p}}. \end{array}$$

4. O complexo $0 \longrightarrow C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$ é chamado a **co--cadeia** de $\mathcal{F}$ relativa à cobertura $\mathfrak{U}$.

5. Os grupos de cohomologia $H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Ker} d^p / \mathrm{Im} d^{p-1}$ são chamados os **grupos de cohomologia de Čech** de $\mathcal{F}$ relativos a $\mathfrak{U}$.

6. Seja $\mathfrak{V} = (V_j)_{j \in J}$ um refinamento de $\mathfrak{U}$ e seja $\varphi\colon j \mapsto v(j)$ um morfismo entre índices tal que $V_j \subset U_{v(j)}$ para qualquer $j$. Desde que $\mathfrak{V}$ seja um refinamento de $\mathfrak{U}$ temos definido o morfismo de restrição:
$$\begin{array}{rcl} \varphi^p(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})\colon C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & C^p(\mathfrak{V}, \mathcal{F}). \\ \alpha_{v(i_0),\cdots,v(i_p)} & \longmapsto & \alpha_{v(i_0),\cdots,v(i_p)}|_{U_{i_0,\cdots,i_{p+1}}} \end{array}$$

7. O morfismo induzido $H^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow H^p(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ é independente da escolha do morfismo de índices em 6. para qualquer $p$.

8. Passando ao limite indutivo sobre a família das coberturas abertas de X temos os **grupos de cohomologia de Čech**:

$$H^p(\mathrm{X},\mathcal{F}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varinjlim H^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}).$$

**Lema 2.10.4** *Para quaisquer* $\mathrm{X},\mathfrak{U},\mathcal{F}$ *como em cima, temos que* $H^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}(\mathrm{X})$.

**Demonstração:** $H^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = \ker[d\colon C^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to C^0(\mathfrak{U},\mathcal{F})]$. Se $\alpha \in C^0(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ é dado por $\{\alpha_i \in \mathcal{F}(U_i)\}$, então para qualquer $i < j$, $(d\alpha)_{ij} = \alpha_j - \alpha_i$. Mas $d\alpha = 0$ equivale a dizer que $\alpha_i$ e $\alpha_j$ coincidem em $U_i \cap U_j$. Pelos axiomas de feixes temos que $\ker d = \mathcal{F}(\mathrm{X})$, i.e. $H^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}(\mathrm{X})$. □

**Teorema 2.10.5 (Leray)** *Seja* $\mathfrak{U}$ *uma cobertura de* X $\mathcal{F}$*-acíclica, i.e.*

$$H^k(U_{i_0,\cdots,i_p},\mathcal{F}) = 0, \qquad k \geq 1$$

*para qualquer* $p \geq 0$ *e qualquer* $(p+1)$*-sequência de índices. Então para qualquer* $k$ $H^k(\mathrm{X},\mathcal{F}) = H^k(\mathfrak{U},\mathcal{F})$.

**Teorema 2.10.6** *Seja* X *um espaço topológico e* $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$ *um subconjunto com a topologia induzida tal que* X *é homotópico a* Y. *Seja* $\mathcal{F}$ *um feixe sobre* X *e* $j\colon \mathrm{Y} \hookrightarrow \mathrm{X}$ *a inclusão, então*

$$H^k(\mathrm{X},\mathcal{F}) \simeq H^k(\mathrm{Y}, j^{-1}\mathcal{F}), \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

**Corolário 2.10.7** *Seja* X *um espaço topológico contractil a um ponto e* $\mathcal{F}$ *um feixe sobre* X, *então* $H^k(\mathrm{X},\mathcal{F}) = 0$ *para qualquer* $k \geq 1$.

**Demonstração:** X é homotópico a um ponto, pelo que basta calcular os grupos de cohomologia de um ponto. Como o espaço topológico constituido por um ponto só tem uma cobertura aberta, constituida por um único aberto, a partir da definição, temos que $H^k(\mathrm{X},\mathcal{F}) = 0$, para qualquer $k \geq 1$. □

**Corolário 2.10.8** *Seja* X *um espaço topológico e* $\mathfrak{U}$ *uma cobertura de* X. *Se os abertos de* $\mathfrak{U}$ *são contracteis a um ponto então* $\mathfrak{U}$ *é* $\mathcal{F}$*-acíclica.*

**Demonstração:** Consequência imediata do Corolário 2.10.7. □

**Definição 2.10.9** *Dado um sistema local* $\mathcal{L}$ *sobre* X *definimos*

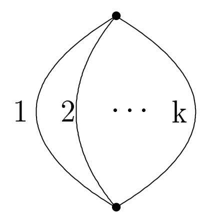
$$h^i(\mathcal{L}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim H^i(\mathrm{X}, \mathcal{L}), \qquad \forall i \in \mathbb{N}_0.$$

**Definição 2.10.10** *Seja* X *uma variedade analítica complexa e* $\mathcal{L}$ *um sistema local sobre* X, *chamamos **característica de Euler** ao invariante*

$$\chi(\mathcal{L}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 0} (-1)^k h^k(\mathcal{L}).$$

**Exemplo 2.10.11**

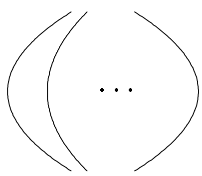
Seja $\mathrm{X} = \mathbb{P} \setminus \{x_1, \cdots, x_k\}$ e $\mathcal{L}$ um sistema local sobre X. X é homotópico ao conjunto




que denotamos por Y. Y é a união dos abertos

$U_1$ $U_2$

e $U_1 \cap U_2$ é formado por $k$ componentes conexas



$U_1 \cap \ U_2$

Dado que $U_1$, $U_2$ são abertos contracteis a um ponto, pelo Corolário 2.10.8 $\mathfrak{U} = (U_1, U_2)$ é uma cobertura $\mathcal{F}$-acíclica de X. Pelo Teorema de Leray 2.10.5 temos então que $H^p(\mathrm{X}, \mathcal{L}) = 0$ para $p \geq 2$, pois para $p \geq 2$ $C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{L}) = 0$. Designando por $W_1, \cdots, W_k$ as componentes conexas de $U_1 \cap U_2$ temos o complexo

$$\begin{array}{rcl} 0 \longrightarrow \mathcal{L}(U_1) \times \mathcal{L}(U_2) & \xrightarrow{d^0} & \mathcal{L}(W_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(W_k) \xrightarrow{d^1} 0 \cdots \\ (a, b) & \longmapsto & (b - a, \cdots, b - a) \end{array}$$

dado que $U_1, U_2, W_1, \cdots, W_k$ são abertos simplesmente conexos temos que $\mathcal{L}(U_1) \simeq \mathcal{L}(U_2) \simeq \cdots \simeq \mathcal{L}(W_k) \simeq V$, para um certo espaço vectorial $V$. Temos então que

$$\begin{array}{rcl} H^0(\mathrm{X}, \mathcal{L}) & \simeq & V \\ H^1(\mathrm{X}, \mathcal{L}) & \simeq & V^{k-1} \end{array}$$

consequentemente

$$\begin{array}{rcl} \chi(\mathcal{L}) & = & (-1)^0 \mathrm{rk}\mathcal{L} + (-1)^1 (k-1) \mathrm{rk}\mathcal{L} \\ & = & (2-k)\mathrm{rk}\mathcal{L} \end{array}$$

O próximo teorema é muito útil para fazer cálculos:

**Teorema 2.10.12 (da sequência exacta longa)** *Uma sucessão exacta curta de feixes*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

*dá origem a uma sucessão exacta longa de cohomologia*

$$\begin{array}{l} 0 \to H^0(\mathrm{X}, \mathcal{F}') \to H^0(\mathrm{X}, \mathcal{F}) \to H^0(\mathrm{X}, \mathcal{F}'') \to H^1(\mathrm{X}, \mathcal{F}') \to \cdots \\ \quad \cdots H^k(\mathrm{X}, \mathcal{F}') \to H^k(\mathrm{X}, \mathcal{F}) \to H^k(\mathrm{X}, \mathcal{F}'') \to H^{k+1}(\mathrm{X}, \mathcal{F}') \to \cdots . \end{array}$$

### 2.10.2 Cohomologia de suporte compacto

**Definição 2.10.13** *Seja* X *um espaço topológico localmente compacto e* $\mathcal{F}$ *um feixe sobre* X*. Chamamos a*

$$\mathcal{F}_c(\mathrm{X}) = \{s \in \mathcal{F}(\mathrm{X}) \mid \mathrm{supp}\,(s) \ \textit{é compacto}\}$$

*as secções de* $\mathcal{F}$ *sobre* X *de* ***suporte compacto****.*

**Lema 2.10.14** *Seja* X *um espaço topológico,* $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ *feixes sobre* X *e* $f \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *um morfismo de feixes. Se* $s \in \mathcal{F}_c(\mathrm{U})$ *então* $s \in \mathcal{G}_c(\mathrm{U})$*.*

**Demonstração:** Designemos $\mathrm{S} = \mathrm{supp}\, f(s) = \{x \in \mathrm{U} \mid (f(s))_x = f_x(s_x) \neq 0\} \subset \mathrm{supp}\, s$. Seja $\sigma = f(s)$, como $(\mathrm{supp}\sigma)^C = \{x \in \mathrm{U} \mid \sigma_x = 0\}$ e dado que

$$\begin{aligned} \sigma_x = 0 \quad &\Rightarrow \quad \exists \mathrm{V} \in \mathcal{O}_x(\mathrm{U}) \text{ tal que } \sigma|_{\mathrm{V}} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \forall y \in \mathrm{V}\ \sigma_y = 0 \end{aligned}$$

então S é fechado, logo é compacto. □

Tendo em conta este Lema, temos definida a cadeia, onde $\mathfrak{U}$ é uma cobertura aberta de X:

$$0 \longrightarrow C_c^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C_c^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

Podemos definir um functor $\mathcal{F}_c$, sobre X dado por

$$\mathrm{U} \text{ aberto de } \mathrm{X} \longmapsto \{s \in \mathcal{F}(\mathrm{U}) \mid \mathrm{supp}\, s \text{ é compacto}\}$$

e os morfismos de restrição são os induzidos pelos do feixe $\mathcal{F}$.

**Definição 2.10.15** *Os grupos de cohomologia de* ***suporte compacto*** *de* $\mathcal{F}$ *são os grupos de cohomologia do functor* $\mathcal{F}_c$.

**Definição 2.10.16** *Sejam* X *e* Y *espaços topológicos separados e localmente compactos. Seja* $f\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *uma aplicação contínua. Dado* $V$ *aberto de* Y *dizemos que um subconjunto fechado* $S \subset f^{-1}(V)$ *é* $f$*-****próprio*** *se* $f|_S$ *é própria, i.e.* $S \cap f^{-1}(K)$ *é um compacto de* X *para qualquer subconjunto compacto* $K$ *de* $V$.

**Definição 2.10.17** *Seja* $\mathcal{F}$ *um feixe sobre* X, $f_!\mathcal{F}$ *é por definição o feixe sobre* Y

$$f_!\mathcal{F}(V) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\phi \in \mathcal{F}(f^{-1}V) \mid \mathrm{supp}\,(\phi) \text{ é } f - \text{próprio}\}$$

**Lema 2.10.18** *Sejam* $f\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *uma aplicação contínua e* $\mathcal{F}$ *um feixe sobre* X, *então* $f_!\mathcal{F}$ *é um subfeixe de* $f_*\mathcal{F}$.

**Demonstração:** Consequência imediata das Definições 2.4.9 e 2.10.17. □

**Corolário 2.10.19** *Sejam* $f\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *uma aplicação contínua e* $\mathcal{F}$ *um feixe sobre* X, *então temos a seguinte sucessão exacta curta:*

$$0 \longrightarrow f_!\mathcal{F} \overset{i}{\hookrightarrow} f_*\mathcal{F} \longrightarrow \mathrm{I} \longrightarrow 0,$$

*onde* $\mathrm{I} = \mathrm{coker}\, i$.

**Lema 2.10.20** *Sejam* $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{s_1, \cdots, s_k\}$, $\mathcal{L}$ *um sistema local sobre* X *e* $j \colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^1$ *a aplicação inclusão. Seja* $\mathcal{F}$ *o feixe sobre* X *associado ao pré-feixe*

$$\begin{array}{lll} V \longmapsto \mathcal{L}(V) & \textit{se} & V \subset X \\ V \longmapsto 0 & \textit{se} & V \not\subset X \end{array}$$

*onde* V *é um aberto de* $\mathbb{P}^1$. *Então* $\mathcal{F} \simeq j_!\mathcal{L}$.

**Demonstração:** Seja $\mathcal{B}$ uma base de abertos conexos de $\mathbb{P}^1$.
• $V \subset X$, onde $V \in \mathcal{B}$, então:

$$\begin{aligned} j_!\mathcal{L}(V) &= \{\phi \in \mathcal{L}(j^{-1}(V)) \mid \operatorname{supp}\phi \text{ é } j\text{-próprio}\} \\ &= \{\phi \in \mathcal{L}(V)\} \\ &= \mathcal{L}(V) \end{aligned}$$

pois para qualquer $\phi \in \mathcal{L}(V)$ $\operatorname{supp}\phi = \operatorname{supp}\phi \cap X$ é fechado, consequentemente $\operatorname{supp}\phi$ é $j$ -próprio pois um fechado num compacto é compacto.

• Seja $V \not\subset X$ onde $V \in \mathcal{B}$, sem perda de generalidade podemos supor que V contem apenas um elemento $s \in \{s_1, \cdots, s_k\}$ e sem perda de generalidade podemos tomar $s = \infty$. Como $\mathcal{L}$ é um feixe localmente constante então para qualquer $\phi \in \mathcal{L}(V - \{\infty\})$

$$S \overset{\text{def}}{=} \operatorname{supp}\phi = \begin{cases} \varnothing & \Leftarrow \quad \phi = 0 \\ V - \{\infty\} & \Leftarrow \quad \phi \neq 0. \end{cases}$$

Seja K um compacto de V, se $S = V - \{\infty\}$ então $j|_S^{-1}(K) = K - \{\infty\}$ o qual geralmente não é fechado, pelo que nesse caso não pode ser compacto. Se $S = \varnothing$ então para qualquer K compacto de V, $j|_S^{-1}(K) = \varnothing$ é compacto pelo que $j_!\mathcal{L}(V) = 0$

Dado que temos as relações anteriores para uma base de abertos de $\mathbb{P}^1$ então $\mathcal{F} \simeq j_!\mathcal{L}$. □

**Definição 2.10.21 (Feixe arranha-céus)** *Sejam* X *um espaço topológico,* $P \in X$ *e* A *um grupo abeliano. Definimos um feixe* $i_P(A)$ *da seguinte forma:*

$$i_P(A)(U) = \begin{cases} A & \Leftarrow \quad P \in U \\ 0 & \Leftarrow \quad P \notin U \end{cases}$$

*onde* U *é um aberto de* X.

**Lema 2.10.22** *Sejam* $\mathrm{X} = \mathbb{P}^1 \setminus \{s_1, \cdots, s_k\}$, $\mathcal{L}$ *um feixe localmente constante sobre* X *e* $j\colon \mathrm{X} \hookrightarrow \mathbb{P}^1$, *a aplicação inclusão. Então:*
*i) O cockernel de* $j_!\mathcal{L} \hookrightarrow j_*\mathcal{L}$ *é a soma de feixes arranha-céus localizados nos pontos* $s_j$.
*ii) Temos a sucessão exacta curta*

$$0 \longrightarrow j_!\mathcal{L} \overset{i}{\hookrightarrow} j_*\mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{I} \longrightarrow 0, \tag{2.12}$$

*iii) A fibra de* $\mathrm{I} = \oplus \mathrm{I}_j$ *no ponto* $s_j$ *é o subespaço* $\mathrm{I}_j$ *das secções locais invariantes pela a acção da monodromia, i.e. é o conjunto dos vectores* $v$ *tais que* $\mathrm{A}_j v = v$.

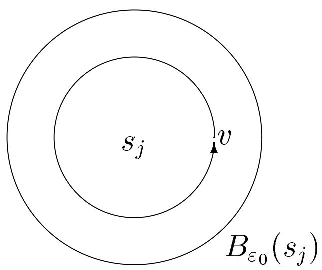
**Demonstração:**
i) Consequência imediata da Definição 2.10.21, do Lema 2.10.20 e da colagem de feixes.
ii) Consequência imediata do Corolário 2.10.19.
iii) Seja $s_j$ um elemento de $\{s_1, \cdots, s_k\}$, por aplicação do Teorema 2.10.3 à sucessão exacta da alínea ii) temos que

$$(\mathrm{I}_j)_{s_j} = (j_*\mathcal{L})_{s_j} / (j_!\mathcal{L})_{s_j} \simeq (j_*\mathcal{L})_{s_j}$$

pois pelo Lema 2.10.20 $(j_!\mathcal{L})_{s_j} = 0$. Seja $B_\varepsilon(s_j)$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ uma família de bolas onde $\varepsilon_0 > 0$ é um raio suficientemente pequeno por forma a que a bola $B_{\varepsilon_0}(s_j)$ contenha apenas um elemento de $\{s_1, \cdots, s_k\}$. Consequentemente

$$\begin{aligned} (j_*\mathcal{L})_{s_j} &= \varinjlim_{\varepsilon \leq \varepsilon_0} j_*\mathcal{L}(B_\varepsilon(s_j)) \\ &= \varinjlim_{\varepsilon \leq \varepsilon_0} \mathcal{L}(B^*_\varepsilon(s_j)) \\ &\simeq \mathcal{L}(B^*_{\varepsilon_0}(s_j)) \end{aligned}$$

pois para qualquer $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ $\mathcal{L}(B^*_\varepsilon(s_j)) \simeq \mathcal{L}(B^*_{\varepsilon_0}(s_j))$ em virtude do Corolário 2.6.6 e do Lema 2.6.4. Seja $v$ um germe de função holomorfa num ponto $x_0 \in B^*_{\varepsilon_0}(s_j)$, dado que o feixe das funções localmente constantes verifica p.p.a. e em virtude de $\mathcal{L}$ ser feixe, temos que as secções de $\mathcal{L}(B^*_{\varepsilon_0}(s_j))$ são aquelas que são invariantes pela a acção da monodromia



i.e. é o conjunto dos vectores $v$ tais que $\mathrm{A}_j v = v$. $\square$

**Lema 2.10.23** *Sejam* $\mathrm{X} = \mathbb{P}^1 \setminus \{s_1, \cdots, s_k\}$, $\mathcal{F}$ *um feixe sobre* X *e* $j\colon \mathrm{X} \hookrightarrow \mathbb{P}^1$, *a aplicação inclusão então* $\mathcal{F}_c(\mathrm{X}) = j_!\mathcal{F}(\mathbb{P}^1)$.

**Demonstração:** Dado um aberto $U$ de $\mathbb{P}^1$, $j^{-1}(U) = U \cap \mathrm{X}$. Seja $S \subset U \cap \mathrm{X}$ um conjunto fechado. Dado $K \subset U$ um conjunto compacto, $j_S^{-1}(K) = K \cap S \subset K$, $K \cap S$ é um conjunto fechado pois um compacto num Hausdorff é fechado, e $K \cap S$ é compacto pois é um subconjunto fechado de um compacto, consequentemente $\mathcal{F}_c(\mathrm{X}) = j_!\mathcal{F}(\mathbb{P}^1)$. $\square$

**Corolário 2.10.24** $H_c^i(\mathrm{X}, \mathcal{F}) = H^i(\mathbb{P}^1, j_!\mathcal{F})$.

**Corolário 2.10.25** *A sucessão exacta curta*

$$0 \longrightarrow j_!\mathcal{L} \overset{i}{\hookrightarrow} j_*\mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{I} \longrightarrow 0,$$

*dá origem à sucessão exacta longa de cohomologia:*

$$\cdots \longrightarrow H^0(\mathrm{X}, \mathcal{L}) \longrightarrow \oplus \mathrm{I}_j \longrightarrow H_c^1(\mathrm{X}, \mathcal{L}) \longrightarrow \cdots$$

*pois* $\mathcal{L}(\mathrm{X}) = j_*\mathcal{L}(\mathrm{X}) = H^0(\mathrm{X}, j_*\mathcal{L})$, *em particular temos que* $h^0(\mathcal{L}) + h_c^1(\mathcal{L}) \geq \sum_j \dim(\mathrm{I}_j)$.

**Demonstração:** Imediata, pois $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{L}) = \mathcal{L}(j^{-1}(\mathbb{P}^1)) = H^0(X, \mathcal{L})$ e $H_c^1(\mathrm{X}, \mathcal{L}) = H^1(\mathbb{P}^1, j_!\mathcal{L})$. $\square$

# Capítulo 3

# Sistema locais rígidos e irredutíveis

Este capítulo foi baseada no livro: *From Gauss to Painlevé* [11].

**Definição 3.0.26** *Um sistema local $\mathcal{L}$, diz-se **irredutível** se dados um sistema local $\mathcal{L}'$ e um mergulho $i\colon \mathcal{L}' \hookrightarrow \mathcal{L}$ então $\mathcal{L}' = 0$ ou $\mathcal{L}' \simeq \mathcal{L}$.*

Se $\mathcal{L}$ é um sistema local sobre um espaço topológico conexo e localmente conexo por arcos, em virtude da equivalência de categorias entre sistemas locais e representações, temos que ao mergulho $i\colon \mathcal{L}' \hookrightarrow \mathcal{L}$ corresponde a seguinte família de diagramas comutativos

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}'_x \arrow[r, hook, "i_x"] \arrow[d, "\mathbf{A}'_{[\gamma]}"'] & \mathcal{L}_x \arrow[d, "\mathbf{A}_{[\gamma]}"] \\
\mathcal{L}'_x \arrow[r, hook, "i_x"'] & \mathcal{L}_x
\end{tikzcd}$$

para cada $[\gamma] \in \pi_1(\mathrm{X}, x)$. Consequentemente $\mathcal{L}$ é um sistema local irredutível se e só se $< 0 >$ e $\mathcal{L}_x$ são os únicos subespaços invariantes da família $\left(\mathbf{A}_{[\gamma]}\right)_{[\gamma]\in\pi_1(\mathrm{X},x)}$.

**Lema 3.0.27** *Sejam $\mathbf{A}_1, \cdots \mathbf{A}_k \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ matrizes tais que os únicos subespaços invariantes comuns são $< 0 >$ e $\mathbb{C}^n$. Se $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ é uma matriz que comuta com $\mathbf{A}_1, \cdots \mathbf{A}_k$ então $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{1}$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$.*

**Demonstração:** Seja $v \neq 0$ um vector próprio de $\mathbf{A}$ associado a um determinado valor próprio $\lambda$ e seja $V_\lambda$ o subespaço próprio associado. Para $i = 1, \cdots, k$ temos

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i\mathbf{A} &\Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{A}_i v = \mathbf{A}_i\mathbf{A}v, \quad \forall v \in V_\lambda \\ &\Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{A}_i v) = \lambda(\mathbf{A}_i v), \quad \forall v \in V_\lambda \\ &\Rightarrow \mathbf{A}_i V_\lambda \subset V_\lambda\end{aligned}$$

Como $V_\lambda \neq < 0 >$ então $V_\lambda = \mathbb{C}^n$, logo $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{1}$. □

Porém o recíproco deste Lema não é verdadeiro como atesta o seguinte contra-exemplo:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

onde $< (1,0) >$ é um subespaço invariante e as únicas matrizes que comutam com $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ são da forma $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{1}$. (cf.3.0.32)

**Definição 3.0.28** *Sejam* X *uma superfície de Riemann,* $\Sigma \subset$ X *um subconjunto finito não vazio e* U $\stackrel{\text{def}}{=}$ X $\setminus \Sigma$. *Seja* $D^*(s) \stackrel{\text{def}}{=}$ U $\cap D(s)$ *onde* $D(s)$ *é um disco suficientemente pequeno em torno de* $s$.

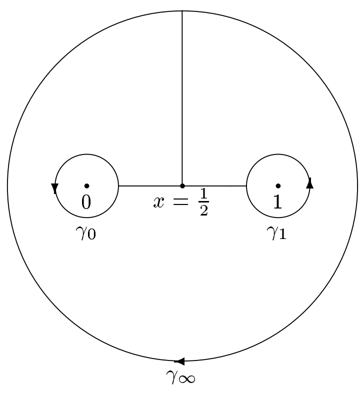
*Um sistema local* $\mathcal{F}$ *sobre* U *diz-se* ***rígido*** *se para qualquer sistema local* $\mathcal{G}$ *sobre* U *e para qualquer* $s \in \Sigma$ *(conjunto das singularidades de* $\mathcal{F}$*)*

$$\mathcal{F}|_{D^*(s)} \simeq \mathcal{G}|_{D^*(s)}, \;\; \forall s \in \Sigma \;\; \Rightarrow \;\; \mathcal{F} \simeq \mathcal{G},$$

*i.e. se* $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ *têm as mesmas monodromias locais para qualquer* $s \in \Sigma$ *então* $\mathcal{F} \simeq \mathcal{G}$.

O ojectivo desta secção é a classificação dos sistemas locais de *rank* 2 sobre X $= \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$.

Vamos descrever a estrutura do grupo fundamental de X. Seja $x = \frac{1}{2}$ o ponto base e $\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_\infty$, três lacetes de ponto base $x$ com os sentidos indicados na figura



e denotemos por $[\gamma_0]$, $[\gamma_1]$, $[\gamma_\infty]$ as respectivas classes de homotopia. $\pi_1(,X,x)$ é o grupo livre gerado por $[\gamma_0]$, $[\gamma_1]$, $[\gamma_\infty]$ sujeito à relação $[\gamma_\infty]^{-1} = [\gamma_0][\gamma_1]$, i.e. é o grupo livre gerado por $[\gamma_0]$, $[\gamma_1]$.

Consequentemente pelo Teorema 2.6.24 , a representação da monodromia de um sistema local identifica-se a uma representação de dimensão 2 de um grupo livre com dois geradores. Seja

$$\begin{array}{rcl} G =< u, v > & : & \text{o grupo livre gerado por u e v,} \\ V & : & \text{um espaço vectorial sobre } \mathbb{C} \text{ de dimensão 2} \\ \rho\colon G \to \mathrm{GL}(V) & : & \text{uma representação com 2 geradores} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \{\lambda_1, \lambda_2\} & : & \text{o conjunto dos valores próprios de } \rho(u), \\ (*) \quad \{\mu_1, \mu_2\} & : & \text{o conjunto dos valores próprios de } \rho(v), \\ \{\nu_1, \nu_2\} & : & \text{o conjunto dos valores próprios de } \rho(uv). \end{array}$$

Notemos que os valores próprios de $(*)$ dependem apenas da classe de conjugação de $\rho$. Da igualdade $\det \rho(u) \det \rho(v) = \det \rho(uv)$ resulta que

$$\lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 = \nu_1 \nu_2. \tag{3.1}$$

Poderíamos pensar que cada classe da representação era determinada pelos valores próprios de $(*)$, mas tal é verdade apenas quando a representação é irredutível.

**Teorema 3.0.29** *(i) $\rho$ é irredutível se e só se*

$$\lambda_i \mu_j \neq \nu_k \quad \forall i, j, k = 1, 2. \tag{3.2}$$

*(ii) Se $\rho$ é irredutível então existe uma base de $V$ tal que $\rho(u)$ e $\rho(v)$ são retresentados pelas matrizes seguintes*

$$\begin{array}{rcl} \rho(u) & \leftrightarrow & \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \\ \rho(v) & \leftrightarrow & \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ (\nu_1 + \nu_2) - (\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 & \mu_2 \end{bmatrix}. \end{array}$$

**Demonstração:** (ii) Suponhamos que $\rho$ é irredutível. Sejam $e_1$ um vector próprio de $\rho(u)$ associado ao valor próprio $\lambda_1$, e $e_2$ um vector próprio de $\rho(v)$ associado ao valor próprio $\mu_2$. Pela irredutibilidade de $\rho$, os dois vectores $e_1$ e

$e_2$ são linearmente independentes, pelo que a recta gerada por $e_2$ não é $\rho(u)$--invariante, logo $e_2$ pode ser normalizado por forma que $\rho(u)e_2 = e_1 + \mathrm{c}^{\mathrm{te}}.e_2$. Na base $\{e_1, e_2\}$, $\rho(u)$ e $\rho(v)$ são representadas pelas matrizes

$$\rho(u) \leftrightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \qquad \rho(v) \leftrightarrow \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ b & \mu_2 \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

consequentemente $\rho(uv)$ é representado por

$$\rho(uv) \leftrightarrow \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} b + \lambda_1\mu_1 & \mu_2 \\ \lambda_2 b & \lambda_2\mu_2 \end{bmatrix}$$

Calculando o traço de $\rho(uv)$ das duas formas possíveis temos que

$$b + \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 = \nu_1 + \nu_2$$

consequentemente $b = (\nu_1 + \nu_2) - (\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2)$.

(i) Se $\rho$ é irredutível então 3.3 implica que $b \neq 0$ e que a recta $< e_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)e_2 >$ invariante para $\rho(u)$ não é invariante para $\rho(v)$, i.e.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ b & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 - \lambda_1 \end{bmatrix} &\neq \mu_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 - \lambda_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mu_1 \\ b + \mu_2(\lambda_1 - \lambda_2) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_1(\lambda_1 - \lambda_2) \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow b + (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1) \neq 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ b & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 - \lambda_1 \end{bmatrix} &\neq \mu_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 - \lambda_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mu_1 \\ b + \mu_2(\lambda_1 - \lambda_2) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_2(\lambda_1 - \lambda_2) \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow b \neq 0 \end{aligned}$$

Reciprocamente se $b \neq 0$ e $b + (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1) \neq 0$ temos que as rectas $< e_1 >, < e_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)e_2 >$ invariantes para $\rho(u)$ não são invariantes para $\rho(v)$ pois

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ b & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ b \end{bmatrix} \neq \mu_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{(a)}$$

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ b & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ b \end{bmatrix} \neq \mu_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{(a)}$$

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ b & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 - \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ b + \mu_2(\lambda_2 - \lambda_1) \end{bmatrix} \neq \mu_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 - \lambda_1 \end{bmatrix}^{(b)}$$

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ b & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 - \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ b + \mu_2(\lambda_2 - \lambda_1) \end{bmatrix} \neq \mu_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 - \lambda_1 \end{bmatrix}^{(a)}$$

$(a)$ –pois $b \neq 0$

$(b)$ –pois $b \neq (\mu_2 - \mu_1)(\lambda_2 - \lambda_1)$.

Resta-nos agora mostrar que $b \neq 0$ e $b + (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1) \neq 0$ se e só se $\lambda_i \mu_j \neq \nu_k$ para quaisquer $i, j, k = 1, 2$. Como $\rho$ é irredutível $b = (\nu_1 + \nu_2) - (\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2)$. Dado que $b + (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1) \neq 0$ e $b \neq 0$ então

$$\begin{gathered} \nu_1 + \nu_2 \neq \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 \\ \nu_1 + \nu_2 \neq \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 \end{gathered}$$

além do mais relembremos que temos a igualdade 3.1

$$\nu_1 \nu_2 = \lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2.$$

Tendo em conta estas relações temos que $\nu_1, \nu_2$ não são soluções das equações do segundo grau

$$(x - \lambda_1 \mu_1)(x - \lambda_2 \mu_2) = 0, \qquad (x - \lambda_1 \mu_2)(x - \lambda_2 \mu_1) = 0 \tag{3.4}$$

consequentemente $\lambda_i \mu_j \neq \nu_k$ para quaisquer $i, j, k = 1, 2$.

Reciprocamente se $\lambda_i \mu_j \neq \nu_k$ para quaisquer $i, j, k = 1, 2$, então $\nu_1, \nu_2$ não são soluções das equações 3.4. Em virtude da igualdade 3.1 temos necessariamente que

$$\begin{gathered} \nu_1 + \nu_2 \neq \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 \\ \nu_1 + \nu_2 \neq \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 \end{gathered}$$

logo $b = (\nu_1 + \nu_2) - (\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2) \neq 0$. Como $b = (\nu_1 + \nu_2) - (\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2)$ e $\nu_1 + \nu_2 \neq \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1$ temos que $b + (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1) \neq 0$. □

Se existem $i, j, k \in \{1, 2\}$ tais que $\lambda_i \mu_j = \nu_k$, mediante uma nova escolha de índices podemos supor que $\lambda_1\mu_1 = \nu_1$ ( e consequentemente $\lambda_2\mu_2 = \nu_2$). Posto isto temos a seguinte classificação dos sistemas locais de rank 2 sobre X:

**Teorema 3.0.30** *Mediante a escolha conveniente de uma base de V temos que as classes de conjugação podem ser escritas da seguinte forma*

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td>$\rho(u)$</td><td>$\rho(v)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\lambda_i\mu_j \neq \nu_k \ \forall i,j,k \in \{0,1\}$</td><td>$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$</td><td>$\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ (\nu_1+\nu_2)-(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2) & \mu_2 \end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td rowspan="10">$\lambda_1\mu_1 = \nu_1 (\Leftrightarrow \lambda_2\mu_2 = \nu_2)$</td><td rowspan="2">$\lambda_1 \neq \lambda_2$<br>$\mu_1 \neq \mu_2$<br>$\nu_1 \neq \nu_2$</td><td>$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$</td><td>$\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td>$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$</td><td>$\begin{bmatrix} \mu_1 & 1 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$<br>$\mu_1 \neq \mu_2$<br>$\nu_1 \neq \nu_2$</td><td>$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$</td><td>$\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td>$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$</td><td>$\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\lambda_1 \neq \lambda_2$<br>$\mu_1 = \mu_2 = \mu$<br>$\nu_1 \neq \nu_2$</td><td>$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$</td><td>$\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td>$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$</td><td>$\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\lambda_1 \neq \lambda_2$<br>$\mu_1 \neq \mu_2$<br>$\nu_1 = \nu_2 = \nu$</td><td>$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$</td><td>$\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td>$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$</td><td>$\begin{bmatrix} \mu_1 & 1 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$<br>$\mu_1 = \mu_2 = \mu$<br>$\nu_1 = \nu_2 = \nu$</td><td>$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$</td><td>$\begin{bmatrix} \mu & b \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad b \in \mathbb{C}$</td></tr>
<tr><td>$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$</td><td>$\begin{bmatrix} \mu & \delta \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \ \delta = 0, 1$</td></tr>
</table>

**Demonstração:** O caso $\lambda_i\mu_j \neq \nu_k$ para quaisquer $i, j, k \in \{1, 2\}$ já foi tratado no Teorema 3.0.29.

Suponhamos então que $\lambda_1\mu_1 = \nu_1$ ($\Leftrightarrow \quad \lambda_2\mu_2 = \nu_2$). Como neste caso $\rho$ é redutível, existe um subespaço V' de dimensão 1 invariante para $\rho(u)$, $\rho(v)$. Seja $e_1 \in V'$ tal que $e_1 \neq 0$. Vamos supor que $e_1$ é um vector próprio correspondente aos valores próprios $\lambda_1$ de $\rho(u)$, $\mu_1$ de $\rho(v)$. Estendendo $e_1$ a uma base $\{e_1, e_2\}$ de $V$, temos que $\rho(u)$, $\rho(v)$ são expressos por matrizes da forma

$$\rho(u) \leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & \varepsilon \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \qquad \rho(v) \leftrightarrow \begin{bmatrix} \mu_1 & \delta \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}, \quad (\varepsilon, \delta \in \mathbb{C}).$$

com $\det \rho(u) = \lambda_1\lambda_2$, $\det \rho(v) = \mu_1\mu_2$.

- $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \mu_1 \neq \mu_2,\ \nu_1 \neq \nu_2$

Neste caso podemos tomar para $e_2$ o vector próprio de $\rho(v)$ associado ao valor próprio $\lambda_2$ pelo que

$$\rho(u) \leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Se $\delta = 0$ temos que

$$\rho(v) \leftrightarrow \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix},$$

caso contrário, mediante a normalização de $e_2$ temos que

$$\rho(v) \leftrightarrow \begin{bmatrix} \mu_1 & 1 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}.$$

Falta mostrar que as classes são distintas. Se $\mathbf{P}$ é uma mudança de base que deixa invariante a matriz

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

então $\mathbf{P}$ comuta com esta, logo pelo Lema 3.0.32 temos que

$$\mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mu_1 & 1 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mu_1 & pq^{-1} \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$$

pelo que a classe de equivalência da primeira é distinta da da segunda.

Por argumentos similares obtemos os restantes casos. □

Dado um sistema local de rank 2 sobre X temos a classificação dos sistemas locais rígidos e não rígidos:

**Corolário 3.0.31** *Os sistemas locais rígidos são aqueles a que correspondem as monodromias locais:*

| | | $\rho(u)$ | $\rho(v)$ |
|---|---|---|---|
| $\lambda_i\mu_j \neq \nu_k\ \forall i,j,k \in \{0,1\}$ | $\lambda_1 \neq \lambda_2$<br>$\mu_1 \neq \mu_2$ | $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$ |
| | $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$<br>$\mu_1 \neq \mu_2$ | $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$ |
| | | $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$ |
| | $\lambda_1 \neq \lambda_2$<br>$\mu_1 = \mu_2 = \mu$ | $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ |
| | | $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ |
| | $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$<br>$\mu_1 = \mu_2 = \mu$ | $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ |
| | | $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ |
| | | $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ |
| | | $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ |
| $\lambda_1\mu_1 = \nu_1 (\Leftrightarrow \lambda_2\mu_2 = \nu_2)$ | $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$<br>$\mu_1 \neq \mu_2$<br>$\nu_1 \neq \nu_2$ | $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$ |
| | | $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$ |
| | $\lambda_1 \neq \lambda_2$<br>$\mu_1 = \mu_2 = \mu$<br>$\nu_1 \neq \nu_2$ | $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ |
| | | $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ |
| | $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$<br>$\mu_1 = \mu_2 = \mu$<br>$\nu_1 = \nu_2 = \nu$ | $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ |
| | | $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ |
| | | $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ |

*Os sistemas locais não rígidos são aqueles a que correspondem as monodromias locais:*

| | | $\rho(u)$ | $\rho(v)$ |
|---|---|---|---|
| $\lambda_1\mu_1 = \nu_1 (\Leftrightarrow \lambda_2\mu_2 = \nu_2)$ | $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\mu_1 \neq \mu_2$, $\nu_1 \neq \nu_2$ | $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$ |
| | $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\mu_1 \neq \mu_2$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ | $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$ |
| | $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ | $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ |

**Demonstração:** Imediata, basta tomar a monodromias locais e averiguar se há ou não classes distintas com a mesma monodromia local. □

**Lema 3.0.32** *Seja* $\mathbf{P}$ *uma matriz* $2 \times 2$ *não singular.*

*(i) Se* $\mathbf{P}$ *comuta com*

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & o \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \qquad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

*então* $\mathbf{P}$ *é da forma*

$$\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix},$$

*e temos que*

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} \mu_1 & \delta \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mu_1 & pq^{-1}\delta \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}.$$

*(ii) Se* $\mathbf{P}$ *comuta com*

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

*então* $\mathbf{P}$ *é da forma*

$$\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & p \end{bmatrix},$$

*e temos que*

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix} \mu_1 & \delta \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mu_1 & p^{-1}q(\mu_2 - \mu_1) + \delta \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}.$$

**Demonstração:** (i) Se

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\mathbf{P}$$

então

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\mathbf{P}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda_1 & o \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1\mathbf{P}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

logo

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; = \; p\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

de forma análoga temos que

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = q\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

logo $\mathbf{P}$ é da forma

$$\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix},$$

pelo que

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix} \mu_1 & \delta \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mu_1 & pq^{-1}\delta \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}.$$

(ii) Se

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\mathbf{P} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\mathbf{P}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda\mathbf{P}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

logo

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = p\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

então

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p & \alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

logo

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & \alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p & \alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & \alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda\alpha + \beta \\ \lambda\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + \lambda\alpha \\ \lambda\beta \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \beta = p
\end{aligned}$$

consequentemente

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p & q \\ 0 & p \end{bmatrix},$$

pelo que

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix} \mu_1 & \delta \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mu_1 & p^{-1}q(\mu_2 - \mu_1) + \delta \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}.$$

$\square$

# Capítulo 4

# O ponto de vista de Riemann

Este capítulo foi baseado nos livros do **Ahlfors** [2] e do **Ince** [9].

## 4.1 Introdução.

A ideia fundamental de Riemann foi a de ver a função hipergeométrica como uma função holomorfa multiforme definida no plano complexo extendido $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, analítica em qualquer ponto à excepção de $0, 1, \infty$, os quais eram assumidos serem pontos de ramificação. Ele especificou a estrutura local do ramos, nesses pontos, e juntou a condição de quaisquer três ramos serem linearmente dependentes. A continuação analítica dos ramos num ponto fixado $x_0 \in \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ao longo de lacetes de ponto base $x_0$ dá origem ao **grupo de monodromia** da função. Riemann mostrou que a função hipergeométrica, tal como a equação diferencial satisfeita por esta eram determinadas de forma única a partir destes pressupostos. O seu ponto de vista era que a monodromia controlava tudo, e ele calculou isso explicitamente, chamando, desta forma, a atenção para este **invariante global** pela primeira vez.

De um ponto de vista moderno a ideia de Riemann consistiu em considerar a variedade $\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma$ (onde $\Sigma$ é um conjunto finito incluindo $\infty$) e subfeixes $\mathcal{L}$ do feixe $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ com a propriedade de que

$$\dim \mathcal{L}_x = n, \qquad (x \in \mathrm{X}).$$

Tal significa que $\mathcal{L}$ é um sistema local (cf.2.3.17 e em particular tem a propriedade de que os seus elementos podem ser prolongados ao longo de qualquer caminho em X (cf. Lema 2.6.7 e Definição 2.4.7).

## 4.2 Pontos singulares regulares

Consideremos uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes meromorfos

$$\omega'' = p(z)\omega' + q(z)\omega. \tag{4.1}$$

Se a origem é uma singularidade regular da equação diferencial, então pelo Teorema de Fuchs(2.7.2)

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{p_{-1}}{z} + p_0 + p_1 z + \cdots && (4.2)\\ q(z) &= \frac{q_{-2}}{z^2} + \frac{q_{-1}}{z} + q_0 + q_1 z + \cdots && (4.3) \end{aligned}$$

com $p_i$, $q_i \in \mathbb{C}$ no caso particular em que $p(z), q(z)$ têm apenas polos simples vale o Teorema:

**Teorema 4.2.1** *Se $p_{-1} \notin \mathbb{N}_0$ então existe uma solução formal de 4.1 e essa série de potências tem um raio de convergência positivo.*

**demonstração:** A demonstração é feita utilizando o método de Frobenius. Consideremos a série de potências

$$\omega = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots \tag{4.4}$$

substituindo em 4.1 temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)b_k z^{k-2} &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} p_{k-1} z^{k-1}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} k b_k z^{k-1}\right) + \\
&\quad + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} q_{k-1} z^{k-1}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^{k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{i+j=k-1\\ i\geq -1\\ j\geq 0}} j p_i b_j\right) z^{k-2} + \\
&\quad + \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{i+j=k-1\\ i\geq -1\\ j\geq 0}} q_i b_j\right) z^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{i+j=k-1\\ i\geq -1\\ j\geq 0}} (j p_i + q_i) b_j\right) z^{k-1}
\end{aligned}$$

logo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k(k+1)b_{k+1} z^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{i+j=k-1\\ i\geq -1\\ j\geq 0}} j p_i b_j\right) z^{k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{i+j=k-1\\ i\geq -1\\ j\geq 0}} q_i b_j\right) z^{k}$$

consequentemente para qualquer $k \geq 0$

$$k(k+1)b_{k+1} - (k+1)p_{-1}b_{k+1} = \sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\geq 0}} j p_i b_j + \sum_{\substack{i+j=k-1\\ i\geq -1\\ j\geq 0}} q_i b_j$$

i.e.

$$\begin{array}{l}
-p_{-1}b_1 = b_0 q_{-1} \\
2(1-p_{-1})b_2 = b_1 p_0 + b_1 q_{-1} + b_0 q_0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
n(n-1-p_{-1})b_n = (n-1)b_{n-1}p_0 + (n-2)b_{n-2}p_1 + \cdots \\
\qquad\qquad +b_1 p_{n-2} + b_{n-1}q_{-1} + b_{n-2}q_0 + \cdots + b_0 q_{n-2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array} \tag{4.5}$$

Dado que $p_1 \notin \mathbb{N}_0$ os coeficientes dos $b_k$, $k \in \mathbb{N}_0$ são sempre não nulos, pelo que estes podem ser obtidos por recorrência à custa se $b_0$, logo $\omega$ é uma solução formal de 4.1. Mostremos então que é convergente. Como as séries 4.2, 4.3 têm um raio de convergência positivo, existe, pelas desigualdades de Cauchy $M_0$, $r_0 > 0$ tais que

$$|p_n| \leq M_0 r_0^{-n} \tag{4.6}$$
$$|q_n| \leq M_0 r_0^{-n} \tag{4.7}$$

Por forma a mostrar que 4.4 tem um raio de convergência positivo, basta provar a desigualdade análoga

$$|b_n| \leq M r^{-n} \tag{4.8}$$

para valores de $M$, $r$ convenientes.

A ideia natural é usar indução em $n$. Escolhamos $M \geq |b_0|$, e suponhamos que 4.8 é válida para qualquer $n < m$. Assumindo ainda $r \leq r_0$, tendo em conta as igualdades de 4.5 e as desigualdades de 4.6, 4.7 temos

$$m|m-1-p_{-1}||b_m| \leq M r^{-m} \left\{ M_0 \left[ \frac{m(m-1)}{2} r + (m-1) r^2 \right] + |q_{-1}| r \right\}.$$

Dado que $p_{-1} \notin \mathbb{N}_0$, $\frac{1}{m|m-1-p_{-1}|}$ é majorado por um certo número positivo donde

$$|b_m| \leq M r^{-m}(Ar + Br^2) \leq M' r^{-m}$$

se tomarmos $r \leq 1$, pelo que a série de potências 4.4 é convergente. $\square$

Se $p_{-1} \in \mathbb{N}_0$ então o sistema 4.5 não tem solução ou um dos $b_n$ pode ser escolhido arbitrariamente.

Se fizermos a mudança de variável $\omega = z^\alpha g(z)$ em 4.1 obtemos a equação diferencial

$$g'' = \left( p - \frac{2\alpha}{z} \right) g' + \left( q + \frac{\alpha p}{z} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{z^2} \right) g \tag{4.9}$$

a qual ainda é uma equação difrencial com singularidades regulares. Esta mudança de variável permite escolher $\alpha$ por forma a que

$$q + \frac{\alpha p}{z} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{z^2}$$

só tenha um polo de ordem simples, i.e. quando

$$\alpha(\alpha-1)-\alpha p_{-1}-q_{-2}=0 \tag{4.10}$$

pois nesse caso, pelo Teorema 4.2.1, existe uma solução da equação diferencial 4.1 da forma $z^\alpha g(z)$ com $g(0)\neq 0$, desde que $p_{-1}-2\alpha\notin\mathbb{N}_0$.

**Definição 4.2.2** *Chamamos* ***equação indicial*** *à equação 4.10.*

As raizes de 4.10 são denotadas por $\alpha_1$, $\alpha_2$. Pelo que

$$\alpha_1+\alpha_2=p_{-1}+1$$

ou de forma equivalente $\alpha_2-\alpha_1=p_{-1}+1-2\alpha_1$.

**Definição 4.2.3** *Dizemos que $\alpha_1$, $\alpha_2$ são* ***excepcionais*** *se $\alpha_2-\alpha_1\notin\mathbb{N}^+$.*

Consequentemente se as raizes da equação indicial não diferem por um inteiro, temos que dadas duas soluções $z^{\alpha_1}g_1(z)$ e $z^{\alpha_2}g_2(z)$ estas são necessariamente linearmente independentes. Se as raizes forem iguais ou diferirem por um inteiro, o método dá apenas uma solução.

## 4.3 A equação hipergeométrica

**Teorema 4.3.1** *As equações diferenciais sobre $\mathbb{P}^1$ tais que $\{0,1,\infty\}$ são as únicas singularidades e estas são regulares, são da forma*

$$\omega''=\left(\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}\right)\omega'+\left(\frac{C}{z^2}+\frac{D}{z(z-1)}+\frac{E}{(z-1)^2}\right)\omega \tag{4.11}$$

*com $A,B,C.D,E\in\mathbb{C}$.*

**Demonstração:** Seja $\omega''=p(z)\omega'+q(z)\omega$ uma equação diferencial de segunda ordem sobre $\mathbb{P}^1$ com coeficientes meromorfos. Tal significa que se fizermos a mudança de variável $z=1/Z$ a equação resultante ainda será uma equação diferencial com coeficientes meromorfos. Como

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z} &= -Z^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}Z}\\ \frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}z^2} &= 2Z^3\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}Z}+Z^4\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}Z^2}\end{aligned}$$

a equação 4.1 toma a forma na vizinhança de $\infty$ :

$$\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}Z^2} = -\left(2Z^{-1} + Z^{-2}p\left(\frac{1}{Z}\right)\right)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}Z} + Z^{-4}q\left(\frac{1}{Z}\right)\omega \tag{4.12}$$

dado que esta ainda tem de ter coeficientes racionais $p$, $q$ são polinómios.

Como a equação 4.1 tem de ter singularidades regulares em 0 e 1 então

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + P(z) \\ q(z) &= \frac{C}{z^2} + \frac{D}{z} + \frac{E}{(z-1)^2} + \frac{F}{z-1} + Q(z) \end{aligned}$$

onde $P(z)$, $Q(z)$ são polinómios, consequentemente a equação 4.12 é da forma

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}Z^2} &= -\left(\frac{2}{Z} + \frac{1}{Z^2}\left(AZ + \frac{BZ}{1-Z} + P\left(\frac{1}{Z}\right)\right)\right)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}Z} + \\ &\quad + \frac{1}{Z^4}\left(CZ^2 + DZ + \frac{EZ^2}{(Z-1)^2} + \frac{FZ}{1-Z} + Q\left(\frac{1}{Z}\right)\right)\omega \\ &= -\left(\frac{A+2}{Z} + \frac{B}{Z(1-Z)} + \frac{1}{Z^2}P\left(\frac{1}{Z}\right)\right)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}Z} + \\ &\quad + \left(\frac{C}{Z^2} + \frac{D}{Z^3} + \frac{E}{Z^2(Z-1)^2} + \frac{F}{Z^3(1-Z)} + \frac{1}{Z^4}Q\left(\frac{1}{Z}\right)\right)\omega \\ &= -\left(\frac{A+B+2}{Z} - \frac{B}{Z-1} + \frac{1}{Z^2}P\left(\frac{1}{Z}\right)\right)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}Z} + \\ &\quad + \left(\frac{C}{Z^2} + \frac{D}{Z^3} + \frac{2E}{Z} + \frac{E}{Z^2} - \frac{2E}{Z-1} + \frac{E}{(Z-1)^2}\right. \\ &\quad \left. + \frac{F}{Z} + \frac{F}{Z^2} + \frac{F}{Z^3} - \frac{F}{Z-1} + \frac{1}{Z^4}Q\left(\frac{1}{Z}\right)\right)\omega \\ &= -\left(\frac{A+B+2}{Z} - \frac{B}{Z-1} + \frac{1}{Z^2}P\left(\frac{1}{Z}\right)\right)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}Z} + \\ &\quad + \left(\frac{2E+F}{Z} + \frac{C+E+F}{Z^2} + \frac{D+F}{Z^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2E+F}{Z-1} + \frac{E}{(Z-1)^2} + \frac{1}{Z^4}Q\left(\frac{1}{Z}\right)\right)\omega \end{aligned}$$

Como $\infty$ é uma singulariedade regular então $P(Z), Q(Z) = 0$ e $D + F = 0$, consequentemente a equação diferencial é da forma

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}Z^2} &= -\left(\frac{A+B+2}{Z} - \frac{B}{Z-1}\right)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}Z} + \\
&+ \left(\frac{2E-D}{Z} + \frac{C-D+E}{Z^2} - \frac{2E-D}{Z-1} + \frac{E}{(Z-1)^2}\right)\omega \\
&= -\left(\frac{A+B+2}{Z} - \frac{B}{Z-1}\right)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}Z} + \\
&+ \left(\frac{C-D+E}{Z^2} + \frac{2E-D}{Z(Z-1)} + \frac{E}{(Z-1)^2}\right)\omega
\end{aligned} \tag{4.13}$$

□

**Teorema 4.3.2** *Designando por $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ as raizes da equação indicial em $0, 1, \infty$ respectivamente, temos que a equação 4.11 se pode escrever da seguinte forma*

$$\begin{aligned}
\omega'' &+ \left(\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{z} + \frac{1-\beta_1-\beta_2}{z-1}\right)\omega' + \\
&+ \left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{z^2} - \frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2}{z(z-1)} + \frac{\beta_1\beta_2}{(z-1)^2}\right)\omega = 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

**Definição 4.3.3** *Chamamos equação **hipergeomtŕica de Gauss** à equação 4.14*

**Demonstração:** • A equação indicial em 0 é

$$\alpha(\alpha-1) = A\alpha + C,$$

se as raizes são $\alpha_1, \alpha_2$ então $A = \alpha_1 + \alpha_2 - 1$, $C = -\alpha_1\alpha_2$.
• A equação indicial em 1 é

$$\beta(\beta-1) = B\beta + E,$$

se as raizes são $\beta_1, \beta_2$ então $B = \beta_1 + \beta_2 - 1$, $E = -\beta_1\beta_2$.
• A equação indicial em $\infty$ é, tendo em conta 4.13,

$$\gamma(\gamma-1) + (A+B+2)\gamma - (C-D+E) = 0$$

pelo que $\gamma_1+\gamma_2 = -(A+B+1)$, $\gamma_1\gamma_2 = -C+D-E$. Dado que $A = \alpha_1+\alpha_2-1$, $B = \beta_1+\beta_2-1$ e $\gamma_1+\gamma_2 = -(A+B+1)$ então

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1. \tag{4.15}$$

Dado que $C = -\alpha_1\alpha_2$, $E = -\beta_1\beta_2$ e $\gamma_1\gamma_2 = -C + D - E$ então

$$D = -\alpha_1\alpha_2 + \gamma_1\gamma_2 - \beta_1\beta_2$$

pelo que a equação 4.11 pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}\omega'' \; + & \left(\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{z} + \frac{1-\beta_1-\beta_2}{z-1}\right)\omega' + \\ & + \left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{z^2} - \frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2}{z(z-1)} + \frac{\beta_1\beta_2}{(z-1)^2}\right)\omega = 0.\end{aligned}$$

□

**Definição 4.3.4** *À equação diferential sobre* $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$

$$z(1-z)\omega'' + [c-(a+b+1)z]\omega' - ab\omega = 0, \tag{4.16}$$

*onde* $c$, $a-b$, $a+b-c \notin \mathbb{Z}$, *chamamos* ***equação hipergeométrica de Riemann***.

Se admitirmos coeficientes meromorfos a equação 4.16 pode ser escrita da seguinte forma

$$\omega'' + \left(\frac{c}{z} + \frac{1-c+a-b}{z-1}\right)\omega' + \frac{ab}{z(z-1)} = 0 \tag{4.17}$$

Como vimos na demonstração do Teorema 4.2.1 equação 4.9 a mudança de variável $\omega = z^\alpha g(z)$ determina uma equação diferencial semelhante.

**Teorema 4.3.5** *Podemos reduzir a equação diferencial 4.14 à equação hipergeométrica de Riemann.*

**Demonstração:** Efectuando a mudança de variável $\omega = z^\alpha g(z)$ na equação 4.14, tendo em conta a equação 4.9 temos

$$
\begin{aligned}
g'' &= \left(\frac{\alpha_1+\alpha_2-1}{z}+\frac{\beta_1+\beta_2-1}{z-1}-\frac{2\alpha}{z}\right)g'+ \\
&+\left(-\frac{\alpha_1\alpha_2}{z^2}+\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2}{z(z-1)}-\frac{\beta_1\beta_2}{(z-1)^2}+\right. \\
&+\left.\frac{\alpha(\alpha_1+\alpha_2-1)}{z^2}+\frac{\alpha(\beta_1+\beta_2-1)}{z(z-1)}-\frac{\alpha(\alpha-1)}{z^2}\right)g \\
&= \left(\frac{(\alpha_1-\alpha)+(\alpha_2-\alpha)-1}{z}+\frac{\beta_1+\beta_2-1}{z-1}\right)g' \\
&+\left(-\frac{(\alpha_1-\alpha)(\alpha_2-\alpha)}{z^2}+\right. \\
&+\left.\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2+\alpha(\beta_1+\beta_2-1)}{z(z-1)}-\frac{\beta_1\beta_2}{(z-1)^2}\right)g \\
&= \left(\frac{(\alpha_1-\alpha)+(\alpha_2-\alpha)-1}{z}+\frac{\beta_1+\beta_2-1}{z-1}\right)g' \\
&+\left(-\frac{(\alpha_1-\alpha)(\alpha_2-\alpha)}{z^2}+\right. \\
&+\left.\frac{(\alpha_1-\alpha)(\alpha_2-\alpha)+\beta_1\beta_2-(\gamma_1+\alpha)(\gamma_2+\alpha)}{z(z-1)}-\frac{\beta_1\beta_2}{(z-1)^2}\right)g
\end{aligned}
$$

Analogamente se efectuarmos a mudança de variável $\omega=(z-1)^{\beta}g(z-1)$ na equação 4.14 temos que esta pode ser escrita da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
g'' &= \left(\frac{\alpha_1+\alpha_2-1}{z}+\frac{(\beta_1-\beta)+(\beta_2-\beta)-1}{z-1}\right)g'+ \\
&+\left(-\frac{\alpha_1\alpha_2}{z^2}+\right. \\
&+\left.\frac{\alpha_1\alpha_2+(\beta_1-\beta)(\beta_2-\beta)-(\gamma_1+\beta)(\gamma_2+\beta)}{z(z-1)}-\frac{(\beta_1-\beta)(\beta_2-\beta)}{(z-1)^2}\right)g
\end{aligned}
$$

A escolha natural a considerar consiste em tomar $\alpha=\alpha_1$ e $\beta=\beta_1$, temos então que os seis expoentes são $\alpha_2-\alpha_1$, $0$, $\beta_2-\beta_1$, $0$, $\gamma_1+\alpha_1+\beta_1$, $\gamma_2+\alpha_2+\beta_2$ respectivamente. Fazendo $a=\alpha_1+\beta_1+\gamma_1$, $b=\alpha_1+\beta_1+\gamma_2$, $c=1+(\alpha_2-\alpha_1)$ e tendo em conta que pela equação 4.15 $c-a-b=\beta_2-\beta_1$, a equação 4.14 pode ser escrita da seguinte forma

$$
\omega''+\left(\frac{c}{z}+\frac{1-c+a-b}{z-1}\right)\omega'+\frac{ab}{z(z-1)}=0
$$

i.e. temos a equação hipergeométrica. $\square$

**Lema 4.3.6** *Dados os expoentes,* $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$ $\gamma_1$, $\gamma_2$ *da equação hipergeométrica de Gauss e os parâmetros* $a$, $b$, $c$ *da equação hipergeométrica de Riemann são equivalentes as afirmações:*
*(i)* $\alpha_1 - \alpha_2$, $\beta_1 - \beta_2$, $\gamma_1 - \gamma_2 \notin \mathbb{Z}$
*(ii)* $c$, $a-b$, $a+b-c \notin \mathbb{Z}$.

**Demonstração:** Na demonstração do Teorema 4.3.5 obtivemos as relações:

$$a = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1, \quad b = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_2, \quad c = 1 + \alpha_1 - \alpha_2,$$

dado que $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1$ temos

$$\begin{aligned} a+b-c &= \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_2 - 1 - \alpha_1 + \alpha_2 \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 + 2\beta_1 + \gamma_1 + \gamma_2 - \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2 - \gamma_1 - \gamma_2 \\ &= \beta_1 - \beta_2 \end{aligned}$$

temos então que:

$$c = 1 + \alpha_1 - \alpha_2, \quad a - b = \gamma_1 - \gamma_2, \quad a + b - c = \beta_1 - \beta_2.$$

Consequentemente temos a equivalência das afirmações (i) e (ii). □

## 4.4 O ponto de vista de Riemann.

Riemann foi um forte proponente da ideia de que uma função analítica pode ser definida pelas suas singularidades e propriedades gerais tão bem ou ainda melhor do que através de uma expressão explícita.

Seguindo as ideias de Riemann vamos mostrar que o feixe das soluções da equação hipergeométrica pode ser caracterizado por propriedades desta natureza. De um ponto de vista moderno a ideia de Riemann consistiu em considerar
i) $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ uma variedade analítica complexa.
ii) $\mathcal{L}$ um subfeixe de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ com a propriedade

$$\dim \mathcal{L}_x = 2, \qquad \forall x \in \mathrm{X}$$

iii) Os expoentes em 0, 1, $\infty$ são respectivamente:

$$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$$

e satisfazem as relações:

$$\alpha_2 - \alpha_1,\ \beta_2 - \beta_1,\ \gamma_2 - \gamma_1 \notin \mathbb{Z} \tag{4.18}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1. \tag{4.19}$$

**Observação 4.4.1** *Notemos que o conhecimento dos expoentes e o conhecimento de que estes satisfazem a relação 4.18 permite calcular as monodromias locais. Em* 0, 1, $\infty$ *as soluções são da forma* $z^{\alpha_1}g_{0_1}(z)$, $z^{\alpha_2}g_{0_2}(z)$, $z^{\beta_1}g_{1_1}(z)$, $z^{\beta_2}g_{1_2}(z)$, $z^{\gamma_1}g_{\infty_1}(z)$, $z^{\gamma_2}g_{\infty_2}(z)$, *com* $g_{0_1}(z)$, $g_{0_2}(z)$, $g_{1_1}(z)$, $g_{1_2}(z)$, $g_{\infty_1}$, $g_{\infty_2}$ *funções holomorfas como os expoentes satisfazem as relações 4.18 então as monodromias locais em* 0, 1, $\infty$ *são respectivamente:*

$$e^{2\pi i\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}},\qquad e^{2\pi i\begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}},\qquad e^{2\pi i\begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}}.$$

*Notemos que o conhecimento das monodromias locais é insuficiente para para a determinação dos expoentes, pois dadas monodromias locais em* 0, 1, $\infty$ *respectivamente:*

$$e^{2\pi i\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}},\qquad e^{2\pi i\begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}},\qquad e^{2\pi i\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}}$$

*e como os* $a_i$, $b_i$, $c_i$ $i = 1, 2$ *só estão definidos módulo* $\mathbb{Z}$ *temos que estes não verificam necessariamente a relação 4.15.*

**Teorema 4.4.2** *Existe um único sistema* $\mathcal{L}$ *em* $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ *com o anterior esquema de expoentes, é o sistema local das soluções do operador*

$$\begin{aligned} L \quad = \quad & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} - \left(\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{z} + \frac{1-\beta_1-\beta_2}{z-1}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} - \\ & - \left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{z^2} - \frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2}{z(z-1)} + \frac{\beta_1\beta_2}{(z-1)^2}\right) \end{aligned}$$

**Demonstração:** Sejam $f, f_1, f_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{U})$ funções definidas sobre um aberto simplesmente conexo U. Como $\mathcal{L}$ é um sistema local de rank 2, valem as identidades

$$\begin{array}{ccccccc} cf & + & c_1 f_1 & + & c_2 f_2 & = & 0 \\ cf' & + & c_1 f_1' & + & c_2 f_2' & = & 0 \\ cf'' & + & c_1 f_1'' & + & c_2 f_2'' & = & 0 \end{array}$$

pelo que

$$\begin{vmatrix} f & f_1 & f_2 \\ f' & f_1' & f_2' \\ f'' & f_1'' & f_2'' \end{vmatrix} = 0.$$

A equação anterior pode ser escrita da seguinte forma

$$f'' = p(z)f' + q(z)f \tag{4.20}$$

com

$$p(z) = \frac{f_1 f_2'' - f_2 f_1''}{f_1 f_2' - f_2 f_1'}, \qquad q(z) = -\frac{f_1' f_2'' - f_2' f_1''}{f_1 f_2' - f_2 f_1'}. \tag{4.21}$$

O denominador não é identicamemte nulo pois tal significaria que

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = 0$$

logo as colunas seriam linearmente dependentes, pelo que $< f_1, f_2 >$ não era uma base de $\mathcal{L}(\mathrm{U})$. As expressões 4.21 permanecem invariantes pela acção de uma transformação linear não singular, i.e. se $f_1, f_2$ são substituidas por $c_{11}f_1 + c_{12}f_2$, $c_{21}f_1 + c_{22}f_2$ respectivamente com $c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12} \neq 0$. Tal é uma consequência imediata de

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{\det\left(\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1'' & f_2'' \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{bmatrix}\right)}, \\ q(z) &= \frac{\det\left(\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1' & f_2' \\ f_1'' & f_2'' \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{bmatrix}\right)} \end{aligned}$$

Consequentemente $p(z)$, $q(z)$ são aplicações definidas em $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1\infty\}$.

Seja $D(s)$, $s \in \{0, 1, \infty\}$ um disco em X e $D^*(s) = D(s) \cap \mathrm{X}$. Por hipótese para um disco $D^*(s)$ suficientemente pequeno existem duas funções $f_1, f_2$ com expoentes $\alpha_1, \alpha_2$ respectivamente, os quais são necessariamente da forma $f_1(z) = z^{\alpha_1}g_1(z)$, $f_2(z) = z^{\alpha_2}g_2(z)$ com $g_1(z)$, $g_2(z)$ aplicações holomorfas em $D^*(0)$, $f_1, f_2$ são linearmente independentes pois $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z}$. Dado que $\alpha_1$, $\alpha_2$ são expoentes e tendo em conta o Teorema4.2.1 temos que $g_1(0)$, $g_2(0) \neq 0$. Tendo em conta o atrás exposto temos

$$\begin{aligned} f_1 f_2' - f_2 f_1' &= (\alpha_2 - \alpha_1) z^{\alpha_1+\alpha_2-1}(C + \cdots) \\ f_1 f_2'' - f_2 f_1'' &= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2 - 1) z^{\alpha_1+\alpha_2-2}(C + \cdots) \\ f_1' f_2'' - f_2' f_1'' &= \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 - \alpha_1) z^{\alpha_1+\alpha_2-3}(C + \cdots) \end{aligned} \tag{4.22}$$

onde as reticências denotam uma série de potências e $C = g_1(0)g_2(0)$. Substituindo $\alpha_1, \alpha_2$ por $\beta_1, \beta_2$, $\gamma_1, \gamma_2$ respectivamente, temos as expressões correspondentes para $1, \infty$. Concluimos então que

$$p(z) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 1}{z} + \frac{\beta_1 + \beta_2 - 1}{z - 1} + p_0(z)$$

onde $p_0(z)$ não tem polos em $0, 1$.

Na vizinhança de $\infty$ a equação 4.20, tendo em conta a equação 4.12, escreve-se da seguinte forma

$$\begin{aligned} \omega'' &= -\left(\frac{2}{z} + \frac{1}{z^2}\left((\alpha_1 + \alpha_2 - 1)z + \frac{(\beta_1 + \beta_2 - 1)z}{1 - z} + p_0\left(\frac{1}{z}\right)\right)\right)\omega' + \\ &\quad + \frac{1}{z^4} q\left(\frac{1}{z}\right)\omega \\ &= -\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + 1}{z} + \frac{\beta_1 + \beta_2 - 1}{z(1 - z)} + \frac{1}{z^2} p_0\left(\frac{1}{z}\right)\right) + \omega' \frac{1}{z^4} q\left(\frac{1}{z}\right)\omega \\ &= -\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + 1}{z} + \frac{\beta_1 + \beta_2 - 1}{z} + \frac{\beta_1 + \beta_2 - 1}{1 - z} + \frac{1}{z^2} p_0\left(\frac{1}{z}\right)\right)\omega' + \\ &\quad + \frac{1}{z^4} q\left(\frac{1}{z}\right)\omega \\ &= -\left(\frac{1 - \gamma_1 - \gamma_2}{z} + \frac{\beta_1 + \beta_2 - 1}{1 - z} + \frac{1}{z^2} p_0\left(\frac{1}{z}\right)\right)\omega' + \frac{1}{z^4} q\left(\frac{1}{z}\right)\omega \\ &= \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}{z} + \frac{\beta_1 + \beta_2 - 1}{z - 1} - \frac{1}{z^2} p_0\left(\frac{1}{z}\right)\right)\omega' + \frac{1}{z^4} q\left(\frac{1}{z}\right)\omega \end{aligned} \tag{4.23}$$

pelo que $p(z)$ em $\infty$ começa por $\frac{\gamma_1+\gamma_2-1}{z} + \frac{2}{z} = \frac{\gamma_1+\gamma_2+1}{z}$. A partir da definição dada em 4.21 $p(z)$ é uma derivada logarítmica, pelo que o resíduo em qualquer polo é um inteiro positivo. A existir algum polo de $p_0(z)$ este terá de pertencer a $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1\}$ e será simples. Designemos por $z_1, \cdots, z_k$ as singularidades de $p_0(z)$ em $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1\}$ e $n_1, \cdots, n_k$ os respectivos resíduos, pelo Teorema dos rezíduos aplicado a $p(z)$ temos

$$(\alpha_1+\alpha_2-1)+(\beta_1+\beta_2-1)+(\gamma_1+\gamma_2+1)+\sum_{i=1}^{k} n_i=0$$

mas $\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2=1$ logo

$$\sum_{i=1}^{k} n_i=0$$

consequentemente $p_0(z)$ é holomorfa em $\mathbb{P}^1$, logo é uma constante. Tendo em conta 4.23 temos que $p_0(z)=0$, pois o desenvolvimento em $\infty$ tem de começar por $\frac{\gamma_1+\gamma_2-1}{z}$.

Como $f_1f_2'-f_2f_1'\neq 0$ excepto em 0, 1, tendo em conta 4.22 temos que

$$q(z)=-\frac{\alpha_1\alpha_2}{z^2}-\frac{\beta_1\beta_2}{(z-1)^2}+\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+q_0(z) \tag{4.24}$$

com $q_0(z)$ holomorfa. Em $\infty$ o desenvolvimento tem de começar por $-\frac{\gamma_1\gamma_2}{z^2}$. Tendo em conta 4.23 $q(z)$ tem a seguinte expressão na vizinhança de $\infty$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^4}\Bigg(-\alpha_1\alpha_2z^2 &- \frac{\beta_1\beta_2}{(z-1)^2}z^2+Az+\frac{B}{1-z}z+q_0\left(\frac{1}{z}\right)\Bigg)=\\
&= -\frac{\alpha_1\alpha_2}{z^2}-\frac{\beta_1\beta_2}{z^2(z-1)^2}+\frac{A}{z^3}+\frac{B}{z^3(1-z)}+\frac{1}{z^4}q_0\left(\frac{1}{z}\right)\\
&= -\frac{\alpha_1\alpha_2}{z^2}-2\frac{\beta_1\beta_2}{z}-\frac{\beta_1\beta_2}{z^2}+2\frac{\beta_1\beta_2}{z-1}-\frac{\beta_1\beta_2}{(z-1)^2}+\\
&\quad +\frac{A}{z^3}+\frac{B}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{B}{z^3}-\frac{B}{z-1}+\frac{B}{z^3(1-z)}+\frac{1}{z^4}q_0\left(\frac{1}{z}\right)\\
&= -\frac{B+2\beta_1\beta_2}{z}-\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-B}{z^2}+\frac{A+B}{z^3}+\frac{2\beta_1\beta_2-B}{z-1}\\
&\quad -\frac{\beta_1\beta_2}{(z-1)^2}+\frac{1}{z^4}q_0\left(\frac{1}{z}\right)
\end{aligned}$$

na vizinhança de $\infty$ só podemos ter um polo de ordem 2 quanto muito, logo $q_0(z)=0$ e $A=-B$. Dado que $q(z)$ na vizinhança de $\infty$ tem de começar por $-\frac{\gamma_1\gamma_2}{z^2}$, então $B=\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2$. Juntando estes resultados temos que $f$ satisfaz a equação

$$\begin{aligned}
\omega'' \;+\; &\left(\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{z}+\frac{1-\beta_1-\beta_2}{z-1}\right)\omega'+\\
&+\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{z^2}-\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2}{z(z-1)}+\frac{\beta_1\beta_2}{(z-1)^2}\right)\omega=0
\end{aligned}$$

i.e. $f$ é solução da equação 4.14, pelo que temos a unicidade. □

Riemann denota qualquer elemento de $\mathcal{L}$ pelo símbolo

$$P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1, & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{array}\right\}.$$

$P$ não denota uma função em particular, mas tal é de pouca importância. Uma vez que a unicidade está estabelecida, temos imediatamente as identidades

$$P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1, & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{array}\right\} = z^\alpha (z-1)^\beta P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1-\alpha & \beta_1-\beta & \gamma_1+\alpha+\beta, & z \\ \alpha_2-\alpha & \beta_2-\beta & \gamma_2+\alpha+\beta & \end{array}\right\}$$

ou

$$P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1, & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{array}\right\} = P\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \infty & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \gamma_1, & 1-z \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 & \end{array}\right\}$$

desde que se tenha algum cuidado com a sua correcta interpretação. O facto de que tais relações, algumas delas bastante elaboradas, poderem ser obtidas tão facilmente é uma das motivações do ponto de vista de Riemann.

**Teorema 4.4.3** *Mediante uma escolha de base conveniente a equação hipergeométrica de Riemann tem as seguintes representações da monodromia:*

| | *monodromia em* 0 | *monodromia em* 1 |
|---|---|---|
| $\alpha_i+\beta_j-\gamma_k \notin \mathbb{Z}$ $\forall i,j,k \in \{0,1\}$ | $\begin{bmatrix} e^{i2\pi\alpha_1} & 1 \\ 0 & e^{i2\pi\alpha_2} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} e^{i2\pi\beta_1} & 0 \\ (e^{i2\pi\beta_1}+e^{i2\pi\beta_2})-(e^{i2\pi(\alpha_1+\beta_1)}+e^{i2\pi(\alpha_2+\beta_2)}) & e^{i2\pi\beta_2} \end{bmatrix}$ |
| $\alpha_1+\beta_1-\gamma_1 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_2+\beta_2-\gamma_2 \in \mathbb{Z}$ | $\begin{bmatrix} e^{i2\pi\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{i2\pi\alpha_2} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} e^{i2\pi\beta_1} & 0 \\ 0 & e^{i2\pi\beta_2} \end{bmatrix}$ |
| | $\begin{bmatrix} e^{i2\pi\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{i2\pi\alpha_2} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} e^{i2\pi\beta_1} & 1 \\ 0 & e^{i2\pi\beta_2} \end{bmatrix}$ |

**Demonstração:** Pelo Lema 4.3.6 temos que $\alpha_1-\alpha_2$, $\beta_1-\beta_2$, $\gamma_1-\gamma_2 \notin \mathbb{Z}$, logo pela Observação 4.4.1 temos que as monodromias locais, em 0, 1, $\infty$, são respectivamente:

$$e^{2\pi i\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}}, \quad e^{2\pi i\begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}}, \quad e^{2\pi i\begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}}.$$

Alterando os índices dos expoentes, se necessário, temos a seguinte relação entre os valores próprios das monodromias locais do Teorema 3.0.30 e os índices:

$$\lambda_1 = e^{i2\pi\alpha_1}, \;\; \lambda_2 = e^{i2\pi\alpha_2}, \;\; \mu_1 = e^{i2\pi\beta_1}, \;\; \mu_2 = e^{i2\pi\beta_2}, \;\; \nu_1 = e^{i2\pi\gamma_1}, \;\; \nu_2 = e^{i2\pi\gamma_2}.$$

Por aplicação do Teorema 3.0.30 temos o resultado pretendido. $\square$

# Capítulo 5

# Rigidez e Lema de Simpson

Este capítulo foi baseado no livro do **Katz** [12] e no artigo do **Simpson** [19].

## 5.1 Introdução

Seja $\mathrm{X} = \mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \cdots, x_k\}$ uma variedade, $\mathcal{L}$ um sistema local sobre X, $\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k$ as respectivas monodromias locais e $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_k$ as respectivas classes de conjugação dessas matrizes. As matrizes $\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k$ verificam a identidade:

$$\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_k = \mathbf{1}. \tag{5.1}$$

**Definição 5.1.1** *Se só existir uma sequência de $k$ matrizes $\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k$ tal que $\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_k = \mathbf{1}$ dizemos que o sistema local (solução) é* ***fortemente rígido (fortemente rígida)****.*

Consideremos então a aplicação holomorfa

$$\begin{array}{rcl} \psi\colon \mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_k & \longrightarrow & \mathrm{SGL}(n, \mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \\ (\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k) & \longmapsto & \mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_k \end{array} \tag{5.2}$$

se $(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k)$ é solução da equação 5.2 temos que $\psi^{-1}(\mathbf{1})$ é uma subvariedade de $\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_k$ cuja dimensão, em cada componente conexa, é $\dim \operatorname{Ker} \mathrm{D}\psi(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k)$, onde $(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k)$ pertence à componente conexa considerada e

$$\mathrm{D}\psi(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k)\colon \mathrm{T}_{(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k)}\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_k \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathbf{1}}\mathrm{SGL}(n, \mathbb{C}).$$

Porém

$$\dim \operatorname{Ker} \mathrm{D}\psi(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k) + \dim \operatorname{Im} \mathrm{D}\psi(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k) = \sum_{j=1}^{k} \dim \mathcal{C}_j$$

e $\dim \operatorname{Im} \mathrm{D}\psi(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k) \leq \dim \mathrm{SGL}(n, \mathbb{C}) = n^2 - 1$, logo

$$\dim \operatorname{Ker} \mathrm{D}\psi(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k) \geq \sum_{j=1}^{k} \dim \mathcal{C}_j + 1 - n^2. \tag{5.3}$$

Quando uma variedade tem mais do que uma componente conexa toma-se para dimensão da variedade o supremo das dimensões de cada componente conexa, consequentemente se $\psi^{-1}(\mathbf{1}) \neq \varnothing$ então

$$\dim \psi^{-1}(\mathbf{1}) \geq \sum_{j=1}^{k} \dim \mathcal{C}_j + 1 - n^2.$$

Chamamos a atenção que $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$ actua no espaço das soluções por conjugação simultânea de todas as matrizes:

$$\begin{array}{rcl} \Phi\colon \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C}) \times (\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_k) & \longrightarrow & \mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_k \\ (\mathbf{A}.\zeta\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), (\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k)) & \longmapsto & (\mathbf{A}\mathbf{A}_1\mathbf{A}^{-1}, \cdots, \mathbf{A}\mathbf{A}_k\mathbf{A}^{-1}) \end{array}$$

O grupo de isotropia em $(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k)$ é

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_k)_{(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k)} & = & \Phi^{-1}_{(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k)}(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k) \\ & = & \{\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{A}, \cdots, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_k\mathbf{A}) = (\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k)\} \end{array}$$

se o sistema local $\mathcal{L}$, dado pela monodromia $(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k)$ em virtude da equivalência de categorias entre os sistemas locais e a representação da monodromia, for rígido, então pelo Lema 3.0.27 $(\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_k)_{(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k)} = \zeta\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \{\lambda 1 \mid \lambda \in \mathbb{C}^*\}$. No caso irredutível por aplicação do Corolário 1.0.15 temos que $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k) \simeq \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})/\{\mathbf{1}\} \simeq \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$, logo a dimensão da órbita de $(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k)$ é $n^2 - 1$, em virtude da inclusão $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k) \subset \Psi^{-1}(\mathbf{1})$ temos que

$$\dim \operatorname{Ker} \mathrm{D}\psi(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k) \geq n^2 - 1.$$

Se o sistema irredutível é fortemente rígido, i.e. se só existe uma solução da equação $\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_k = \mathbf{1}$ a menos de conjugação, então temos a desigualdade:

$$\sum_{j=1}^{k} \dim \mathcal{C}_j \leq 2(n^2-1).$$

Faz então sentido colocar a questão:

-Que informações podemos conhecer do sistema local conhecendo o invariante $\sum_{j=1}^{k} \dim \mathcal{C}_j - 2(n^2-1)$?

O Lema de Simpson fornece uma resposta a esta questão.

## 5.2 Lema de Simpson

**Lema 5.2.1** *Se $\sum \dim(\mathcal{C}_j) < 2n^2-2$ então não existem soluções irredutíveis. Se $\sum \dim(\mathcal{C}_j) = 2n^2-2$ e se existe uma solução irredutível então esta é fortemente rígida. Se $\sum \dim(\mathcal{C}_j) > 2n^2-2$ nenhuma solução é fortemente rígida.*

**Demonstração:** A demonstração é baseada em alguns cálculos de grupos de cohomologia em $\mathrm{X} = \mathbb{P}^1 \setminus \{s_1, \cdots, s_k\}$. Se $\mathcal{L}$ é um sistema local sobre X então, como vimos no Exemplo 2.10.11, os grupos de cohomologia não nulos são $H^i(\mathrm{X}, \mathcal{L})$ para $i = 0, 1$. Denotemos as suas dimensões por $h^i(\mathcal{L})$. Por outro lado existem também os grupos de cohomologia de suporte compacto, que são denotados por $H^i_c(\mathrm{X}, \mathcal{L})$ e as suas dimensões são denotadas por $h^i_c(\mathcal{L})$. Estes grupos podem ser calculados por intermédio do Corolário 2.10.24 que fornece as identidades:

$$H^i_c(\mathrm{X}, \mathcal{F}) = H^i(\mathbb{P}^1, j_!\mathcal{F}).$$

A demostração é baseada nos três factos seguintes:

1. A característica de Euler, como vimos no Exemplo 2.10.11, pode ser calculada

$$\chi(\mathcal{L}) = h^0(\mathcal{L}) - h^1(\mathcal{L}) = (2-k)\mathrm{rk}\mathcal{L}.$$

   Tal é consequência de X ser homotópico a um grafo com dois vértices e $k$ arestas, pelo que podemos calcular a cohomologia do feixe localmente constante $\mathcal{L}$ utilizando um complexo da forma $V^2 \to V^k$, cf. o exemplo 2.10.11, onde V é um espaço vectorial de dimensão igual ao rank de $\mathcal{L}$.

2. Existe a dualidade de Poincaré entre a cohomologia e a cohomologia de suporte compacto. Mais precisamente, se $\mathcal{L}$ é um sistema local e denotando $\mathcal{L}^*$ o seu dual, então $H^i(\mathrm{X}, \mathcal{L})$ é dual a $H_c^{2-i}(\mathrm{X}, \mathcal{L}^*)$. Em particular $h^i(\mathcal{L}) = h_c^{2-i}(\mathcal{L}^*)$.

3. Finalmente, como vimos no Lema 2.10.22, a inclusão de $j_!\mathcal{L}$ como subfeixe de $j_*\mathcal{L}$ dá origem à sucessão exacta curta

$$0 \longrightarrow j_!\mathcal{L} \longrightarrow j_*\mathcal{L} \longrightarrow \oplus \mathrm{I}_j \longrightarrow 0$$

onde $\mathrm{I}_j$ é o espaço vectorial das secções invariantes pela pela monodromia, i.e. é o conjunto dos vectores $v$ tais que $\mathbf{A}_j v = v$. Esta sucessão exacta curta dá origem à sucessão exacta longa de grupos de cohomologia:

$$\cdots \longrightarrow H^0(\mathrm{X}, \mathcal{L}) \longrightarrow \oplus \mathrm{I}_j \longrightarrow H_c^1(\mathrm{X}, \mathcal{L}) \longrightarrow \cdots$$

pois $\mathcal{L}(\mathrm{X}) = j_*\mathcal{L}(\mathrm{X}) = H^0(\mathrm{X}, j_*\mathcal{L})$, em particular temos que $h^0(\mathcal{L}) + h_c^1(\mathcal{L}) \geq \sum_j \dim(\mathrm{I}_j)$.

Passemos à demonstração propriamente dita.

Apliquemos o cálculo da característica de Euler ao sistema local dual $\mathcal{L}^*$, e de seguida adicionemos as equações

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{L}^*) - h^1(\mathcal{L}^*) &= (2-k)\mathrm{rk}\mathcal{L} \\ h^0(\mathcal{L}) + h_c^1(\mathcal{L}) &\geq \sum_j \dim(\mathrm{I}_j). \end{aligned}$$

Usando a dualidade de Poincaré $h^i(\mathcal{L}) = h_c^{2-i}(\mathcal{L}^*)$ temos que

$$h^0(\mathcal{L}) + h^0(\mathcal{L}^*) \geq (2-k)\mathrm{rk}\mathcal{L} + \sum_j \dim(\mathrm{I}_j).$$

Suponhamos que $\mathcal{L}_1$, e $\mathcal{L}_2$ são dois sistemas locais cujas matrizes de monodromia pertencem às mesmas classes de conjugação $\mathcal{C}_j$. Apliquemos a identidade anterior ao sistema local $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1^* \otimes_{\mathbb{C}_\mathrm{X}} \mathcal{L}_2$. As secções globais de $\mathcal{L}$ são os homomorfismos de sistemas locais de $\mathcal{L}_1$ para $\mathcal{L}_2$, cf. o Corolário 2.6.17, e as seções globais de $\mathcal{L}^*$ são os homomorfismos de sistemas locais de $\mathcal{L}_2$ para $\mathcal{L}_1$. Notando que $\mathcal{L}$ tem rank $n^2$ temos

$$\dim \mathrm{Hom}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) + \dim \mathrm{Hom}(\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1) \geq (2-k)n^2 + \sum_j \dim(\mathrm{I}_j).$$

Seja $\mathrm{D} \subset \mathbb{P}^1$ um disco centrado em $s_j$ suficiente pequeno por forma a que $s_j$ seja o único elemento de $\{s_1, \cdots, s_k\}$ em D. Sejam $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ sistemas locais sobre $\mathrm{D}^* = \mathrm{D} \setminus \{s_j\}$ com a mesma monodromia $\mathbf{A}_j$ e $x \in \mathrm{D}^*$. Então pela equivalência de categorias entre os sistemas locais e a representação da monodromia temos:

$$\mathcal{L}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{L}_2 \quad \leftrightarrow \quad \begin{tikzcd} \mathcal{L}_{1x} \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "\mathbf{A}_j"'] & \mathcal{L}_{2x} \arrow[d, "\mathbf{A}_j"] \\ \mathcal{L}_{1x} \arrow[r, "\varphi_x"'] & \mathcal{L}_{2x} \end{tikzcd}$$

Com vista ao cálculo de $\dim(\mathrm{I}_j)$ comecemos por relembrar que a uma secção local de $\mathcal{L}$ invariante em D, por acção da monodromia local de $\mathcal{L}$ em $s_j$, corresponde uma matriz $\mathbf{M}$ para a qual o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}_{1x} \arrow[r, "\mathbf{M}"] \arrow[d, "\mathbf{A}_j"'] & \mathcal{L}_{2x} \arrow[d, "\mathbf{A}_j"] \\ \mathcal{L}_{1x} \arrow[r, "\mathbf{M}"'] & \mathcal{L}_{2x} \end{tikzcd}$$

consequentemente a dimensão do espaço das secções invariantes $\mathrm{I}_j \simeq \{\mathbf{M} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}_j\mathbf{M} = \mathbf{A}_j\}$ de $\mathcal{L}$ corresponde à dimensão do grupo de isotropia da acção definida no Exemplo 1.0.8, por aplicação da identidade do Exemplo 1.0.16 temos então:

$$\dim(\mathrm{I}_j) = n^2 - \dim(\mathcal{C}_j).$$

Dado que existem $k$ pontos, quanto usamos estas identidades na desigualdade anterior o termo $kn^2$ é cancelado, pelo que

$$\dim \mathrm{Hom}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) + \dim \mathrm{Hom}(\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1) \geq 2n^2 - \sum_j \dim(\mathcal{C}_j).$$

Esta desigualdade permite-nos provar o Lema.

• Se $\sum \dim(\mathcal{C}_j) < 2n^2 - 2$ então, tomando $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$, temos:

$$2\dim \mathrm{End}(\mathcal{L}_1) > 2$$

a qual implica que $\mathcal{L}_1$ não é irredutível.

• se $\sum \dim(\mathcal{C}_j) = 2n^2 - 2$ e se $\mathcal{L}_1$ é uma solução irredutível então para qualquer outra solução $\mathcal{L}_2$ temos a desigualdade:

$$\dim \mathrm{Hom}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) + \dim \mathrm{Hom}(\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1) \geq 2.$$

Se existe um morfismo não nulo $\phi\colon \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, então $\ker\phi = 0$ pois $\mathcal{L}_1$ é irredutível, consequentemente $\mathcal{L}_1 \simeq \mathcal{L}_2$ pois têm o mesmo rank e este é finito. Se existe um morfismo não nulo $\phi\colon \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$, então $\phi(\mathcal{L}_2) = \mathcal{L}_1$ pois $\mathcal{L}_1$ é irredutível, consequentemente $\mathcal{L}_1 \simeq \mathcal{L}_2$ pois têm o mesmo rank e este é finito. Consequentemente $\mathcal{L}_1 \simeq \mathcal{L}_2$.

• se $\sum \dim(\mathcal{C}_j) > 2n^2 - 2$ tendo em conta a desigualdade 5.3 temos que:

$$\dim \mathrm{Ker}\, \mathrm{D}\psi(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k) > n^2 - 1.$$

Suponhamos por absurdo que o sistema local $\mathcal{L}$ é fortemente rígido. Então: $\dim \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C}) = \dim \mathrm{Ker}\, \mathrm{D}\psi(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k)$, mas $\dim \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})/\zeta\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C}).(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_k) \leq n^2 - 1$ o que é absurdo. Consequentemente $\mathcal{L}_1$ não pode ser fortemente rígido. $\square$

# Apêndice A

# Espaços de Revestimento

Este Apêndice foi baseado nos livros do **Neto** [15] e **Sabbah** [18].
Ao longo do apêndice iremos supor que os espaços topoólogicos são:
• conexos,
• cada ponto admite uma vizinhança conexa por arcos e simplesmente conexa.

**Definição A.0.1** *Seja* $f\colon \mathrm{X} \to Y$ *uma aplicação contínua. Um aberto* U *de* Y *diz-se* ***elementar relativamente a*** $f$ *se, para qualquer componente conexa* V *de* $f^{-1}(\mathrm{U})$, *a aplicação*$f|_{\mathrm{V}}\colon \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ *é um homeomorfismo.*

**Definição A.0.2** *Sejam* X, $\tilde{\mathrm{X}}$ *espaços topológicos. Uma aplicação contínua* $p\colon \tilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$ *diz-se um* ***revestimento*** *de* X *se qualquer* $x_0 \in \mathrm{X}$ *admite uma vizinhança aberta* U *que é um aberto elementar. Chamaremos, por vezes, revestimento ao espaço topológico* $\tilde{\mathrm{X}}$ *e projeção á aplicação* $p$.

**Definição A.0.3** *Sejam* X, Y *espaços topológicos. Uma aplicação* $f\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *diz-se um* ***homeomorfismo local*** *se para qualquer* $x \in \mathrm{X}$ *existe uma vizinhança aberta* U *de* $x$ *tal que* $f(\mathrm{U})$ *é uma aberto e* $f|_{\mathrm{U}}\colon \mathrm{U} \to f(\mathrm{U})$ *é um homeomorfismo.*

**Lema A.0.4** *Seja* $p\colon \tilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$ *um revestimento. Fixemos* $\tilde{x} \in \tilde{\mathrm{X}}$ *e seja* $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. *Dado um caminho* $\gamma\colon [a,b] \to \mathrm{X}$ *tal que* $\gamma(a) = x_0$, *existe um e um só caminho* $\tilde{\gamma}\colon [a,b] \to \tilde{\mathrm{X}}$ *tal que* $\tilde{\gamma}(a) = \tilde{x}_0$ *e* $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

**Definição A.0.5** *O caminho* $\tilde{\gamma}$ *diz-se um* ***levantamento*** *de* $\gamma$.

**Demonstação:** Seja U um aberto elementar que contenha $x_0$ e V a componente conexa de $p^{-1}(\mathrm{U})$ que contem $\tilde{x}_0$.

• Se $\gamma([a,b]) \subset \mathrm{U}$ então $\tilde{\gamma} = (p^{-1})|_{\mathrm{V}} \circ \gamma$ é o único caminho tal que $\tilde{\gamma}(a) = \tilde{x}_0$ e $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

• Se $\gamma([a,b]) \not\subset \mathrm{U}$ então existe uma família $(\mathrm{U}_{\gamma(t)})_{t\in[a,b]}$ de abertos elementares tal que $\gamma([a,b]) \subset \cup_{t\in[a,b]}\mathrm{U}_{\gamma(t)}$, como $\gamma([a,b])$ é compacto, pois $\gamma$ é contínua e $[a,b]$ é compacto, então podemos tomar uma subcobertura finita de abertos elementares. Chamemo-lhes $\mathrm{U}_1, \cdots, \mathrm{U}_n$, sem perda de generalidade podemos supor que $\mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_{i+1} \neq \varnothing$, $i = 1, \cdots, n-1$, pois $\gamma([a,b])$ é conexo. Seja $\tau_i \in [a,b]$ tal que $\gamma(\tau_i) \in \mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_{i+1}$ e tomemos $\tau_n = b$. Sejam $\mathrm{V}_1$ a componente conexa de $p^{-1}(\mathrm{U}_1)$ que contem $\tilde{x}_0$, $\mathrm{V}_2$ a componente conexa de $p^{-1}(\mathrm{U}_1)$ que contem $(p^{-1})|_{\mathrm{V}_1} \circ \gamma(\tau_2), \cdots, \mathrm{V}_n$ a componente conexa de $p^{-1}(\mathrm{U}_n)$ que contem $(p^{-1})|_{\mathrm{V}_n} \circ \gamma(\tau_n)$. Por colagem da família $((p^{-1})|_{\mathrm{V}_i} \circ \gamma)_{i\in\{1,\cdots,n\}}$ obtemos um caminho $\tilde{\gamma}\colon [a,b] \to \tilde{\mathrm{X}}$ tal que $\tilde{\gamma}(a) = \tilde{x}_0$ e $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, pelo que provámos a existência.

Provemos a unicidade. Sejam $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma}'$ dois levantamentos de $\gamma$ tais que $\tilde{\gamma}(a) = \tilde{\gamma}'(a)$, utilizando o mesmo argumento obtemos uma cobertura aberta finita $(\mathrm{i}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de $[a,b]$ tal que $\tilde{\gamma}|_{\mathrm{I}_i} = \tilde{\gamma}'|_{\mathrm{I}_i}$, consequentemente $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}'$. □

**Lema A.0.6** *Seja* $p\colon \tilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$ *um revestimento. Fixemos* $\tilde{x} \in \tilde{\mathrm{X}}$ *e seja* $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. *Dada uma aplicação contínua* $\varphi\colon [a,b]\times[0,1] \to \mathrm{X}$ *tal que* $\varphi(a,0) = x_0$, *existe uma e uma só aplicação* $\tilde{\varphi}\colon [a,b]\times[0,1] \to \tilde{\mathrm{X}}$ *tal que* $\tilde{\varphi}(a.0) = \tilde{x}_0$ *e* $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$.

**Demonstração:** Análoga à do Lema A.0.4. □

**Definição A.0.7** *Sejam* $p\colon \tilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$, $p'\colon \tilde{\mathrm{X}}' \to \mathrm{X}$ *revestimentos de* X. *Uma aplicação contínua* $f\colon \tilde{\mathrm{X}} \to \tilde{\mathrm{X}}'$ *diz-se um* ***homomorfismo de revestimentos*** *se o diagrama seguinte for comutativo:*

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathrm{X}} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathrm{X} & \tilde{\mathrm{X}}' \arrow[l, "p'"] \end{tikzcd}$$

**Lema A.0.8** *Seja* $p\colon \tilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$ *um revestimento simplesmente conexo,* $x \in \tilde{\mathrm{X}}$ *e* $y \in p^{-1}(x)$, *então existe um e um só autmorfismo* $h\colon : \tilde{\mathrm{X}} \to : \tilde{\mathrm{X}}$ *tal que* $h(x) = y$ *e* $h$ *é um isomorfismo.*

**Demonstração:** Seja $\gamma\colon [a,b] \to \tilde{\mathrm{X}}$ um caminho em $\tilde{\mathrm{X}}$ e seja $\tilde{\gamma}$ o levantamento de $p \circ \gamma\colon [a,b] \to \mathrm{X}$ de ponto base $y$, o qual é único pelo Lema A.0.4.

Sejam $\gamma$, $\gamma'$: $[a,b] \to \tilde{\mathrm{X}}$ caminhos em $\tilde{\mathrm{X}}$ tais que $\gamma$, $\gamma'$ são homotópicos, então existe uma aplicação contínua $H\colon [a,b] \times [0,1] \to \tilde{\mathrm{X}}$ tal que $H(a,t) = \gamma(t)$, e $H(b,t) = \gamma'(t)$. Pelo Lema A.0.6 existe existe uma e uma só aplicação contínua $\tilde{H}$ tal que $p \circ H = p \circ \tilde{H}$ e $H(a,0) = y$. Consequentemente os caminhos $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma}'$ são homotópicos, logo $\tilde{\gamma}(b) = \tilde{\gamma}'(b)$. Podemos, então, definir a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} h\colon \tilde{\mathrm{X}} &\longrightarrow \tilde{\mathrm{X}} \\ u &\longmapsto v \end{aligned}$$

onde $v = \tilde{\gamma}(b)$ para um caminho arbitrário $\gamma$ tal que $\gamma(b) = u$, em particular $h$ é uma bijecção.

Mostremos que $h$ é um homeomorfismo. Seja $v \in \tilde{\mathrm{X}}$ e U um aberto elementar tal que $p(v) \in \mathrm{U}$. Sejam V, V' abertos de $\tilde{\mathrm{X}}$ tais que V é a componente conexa de $p^{-1}(\mathrm{U})$ que contem $u$ e V' é a componente conexa de $p^{-1}(\mathrm{U})$ que contem $v$. Consequentemente $h^{-1}(\mathrm{V}') = \mathrm{V}$. Se tomarmos uma base de abertos elementares $(\mathrm{U}_i)_{i\in I}$ concluimos que $h$ é contínua. Pelo mesmo argumento concluimos que $h^{-1}$ também é contínua, logo $h$ é um homeomorfismo.

Sejam $h$, $\eta$ dois homeormorfisnos que satisfaçam as condições do enunciado, consequentemente $= h \circ \eta^{-1}$ é um homeomorfismo que deixa o ponto $x$ fixo. Para mostrarmos a unicidade basta mostrar que $f = \mathrm{id}$. Seja $(\mathrm{V}_i)_{i\in I}$ uma cobertura de $\tilde{\mathrm{X}}$ por abertos conexos tal que $(p(\mathrm{V}_i))_{i\in I}$ é uma família de abertos elementares de X. Seja $\mathrm{V}_{i_0}$ o aberto que contem $x$, como $f|_{\mathrm{V}_{i_0}} = (p|_{\mathrm{V}_{i_0}})^{-1} \circ p$ então $f|_{\mathrm{V}_{i_0}} = \mathrm{id}_{\mathrm{V}_{i_0}}$, logo $f$ deixa invariantes todos os pontos de $\mathrm{V}_{i_0}$. Iterando o processo e dado que $\tilde{\mathrm{X}}$ é conexo temos que $f = \mathrm{id}_{\tilde{\mathrm{X}}}$.
□

**Teorema A.0.9** *Entre todos os revestimentos de um espaço topológico* X*, existe um e um só que é simplesmente conexo.*

**Definição A.0.10** *Ao revestimento simplesmente conexo de um espaço topológico* X *chamamos o* ***revestimento universal****.*

**Corolário A.0.11** *Seja* $(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{o})$ *um revestimento universal de* $(\mathrm{X}, o)$*. Seja* $\gamma$ *um lacete em* X *de ponto base* $o$ *e* $\tilde{\gamma}$ *o levantamento de* $\gamma$ *tal que* $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{o}$*. Seja* $h_{[\gamma]}$ *o único automorfismo do revestimento de* $\tilde{\mathrm{X}}$ *tal que* $h_{[\gamma]}(\tilde{o}) = \tilde{\gamma}(1)$*, então*

$$\begin{aligned} \Phi\colon \pi_1(\mathrm{X}, o) \times \tilde{\mathrm{X}} &\longrightarrow \tilde{\mathrm{X}}, \\ ([\gamma], \tilde{x}) &\longmapsto h_{[\gamma]}(\tilde{x}) \end{aligned}$$

*é uma acção de* $\pi_1(\mathrm{X}, o)$ *em* $\tilde{\mathrm{X}}$*.*

# Referências Bibliográficas


[1] **Abraham, Ralph, Marsden, Jerrold E.**, *Foundations of mechanics*, The Benjamin/Cummigs Publishing Company, Inc., 1978.

[2] **Ahlfors, Lars V.**, *Complex analysis -An introduction to the theory of analytic complex functions of one complex variable*, second edition, McGraw-Hill, 1966.

[3] **Björk, J. E.**, *Analytic $\mathcal{D}$ -modules and Applications*, Kluwer, 1993.

[4] **Borel, Armand**, *Algebraic d-modueles*, Academic Press, 1987.

[5] **Brickell, F and Clark, R. S.**, *Differentiable manifolds -An introduction*, Van Nostrand Reinhold Company, 1970.

[6] **Carmo, Manfredo P.**, *Notas de um curso de grupos de Lie*, Impa, 1974.

[7] **Fernandes, Teresa Monteiro**, *Topologia algébrica e teoria elementar dos feixes*, Textos de Matemática, 1998.

[8] **Hartshorne, Robin**, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1970.

[9] **Ince, E. L.**, *Ordinary differential equations*, Dover, 1966.

[10] **Iversen, Birger**, *Cohomology of sheaves*, Springer-Verlag, 1986.

[11] **Iwasaki, K.; Kimura, H., Shimomura, S., Yoshida, M.**, *From Gauss to Painlevé*, Vieweg,

[12] **Katz, Nicholas M.**, *Rigid local systems*, Princeton University Press, 1996.

[13] **Machado, Armando**, *Introdução à análise funcional*, Escolar Editora, 1991.

[14] **Martin, Daniel**, *Manifold Theory -An introduction for mathematical physicists*, Ellis Horwood, 1991.

[15] **Neto, Orlando**, *Equações diferenciais em superfícies de Riemann*, Textos de Matemática, 1994.

[16] **Neto, Orlando, Silva, F. C.**, *On the recognition and rigidity problems for sums of matrices*, 1998

[17] **Robinson, Derek J. S.**, *A Course in the theory of groups*, Springer-Verlag, 1982.

[18] **Sabbah, Claude**, *Déformations isomonodromiques et varétés de Frobenius -Une Introduction*, 2000.

[19] **Simpson, Carlos T.**, *Products of matrices*, Can. Math. Soc. Conference Proceeding 12 (1992), 157-185.

[20] **Varadarajan, V.S.**, *Meromorphicd differential equations*, Expositiones Mathematicae 9 (1991), 97-188.

# Índice Remissivo